Quiz

Für beliebige Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ und Konstanten $a_1, \ldots, a_n$ gilt:
$\mathbb{E}[a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n] = a_1\mathbb{E}[X_1] + \cdots + a_n\mathbb{E}[X_n]$.

[X] Wahr
[ ] Falsch

Linearität des Erwartungswertes gilt immer

Für beliebige unabhängige Zufallsvariablen X_1, X_2 gilt:
$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2)$.

[X] Wahr
[ ] Falsch

Lemma Skript

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}(X) = 1$ und $\mathrm{Var}(Y) = 4$. Dann ist
$\mathrm{Var}(X - Y) = -3$.

[ ] Wahr
[X] Falsch

Varianz kann nie negativ sein!

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X - Y) &= \mathrm{Var}(X + (-1)\,Y) \\ &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}((-1)\,Y) \\ &= \mathrm{Var}(X) + \underbrace{(-1)^2}_{=1}\,\mathrm{Var}(Y) \\ &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \\ &= 1 + 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen, dann ist $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

[X] Wahr
[ ] Falsch

Lemma Skript

Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen, sodass $\mathrm{Var}(X_i) = 1$ für alle i, dann ist
$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = n$.

[ ] Wahr
[X] Falsch

es braucht die zusätzliche Bedingung, dass $X_1, .., X_n$ unabhängig sind

Für eine Zufallsvariable X mit $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ und $\mathbb{E}[X] = 0$ und jedem $\lambda > 0$ gilt: $Pr(X > \lambda\sigma) \leq 1/\lambda^2$.

Chebyshev: $\Pr\left[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda\sigma\right] \leq \frac{1}{\lambda^2}$

[X] Wahr
[ ] Falsch

$\Pr[X > \lambda\sigma] \leq \Pr[X \geq \lambda\cdot\sigma] \leq \Pr[|X| \geq \lambda\sigma] \leq \frac{1}{\lambda^2}$

das Ereignis $\{X > \lambda\sigma\}$ ist eine Teilmenge von $\{X \geq \lambda\cdot\sigma\}$

das Ereignis $\{X \geq \lambda\sigma\}$ ist eine Teilmenge von $\{|X| \geq \lambda\cdot\sigma\}$

(sehr schwierige Frage .)

Seien X, Y, Z drei Zufallsvariablen, wobei X und Y unabhängig sind. Dann gilt immer: $\mathbb{E}[X + \underbrace{Y\cdot Z}] = \mathbb{E}[X] + \underbrace{\mathbb{E}[Y]\cdot\mathbb{E}[Z]}$.

[ ] Wahr
[X] Falsch

gilt im Allgemeinen nur wenn Y und Z unabhängig sind

Wenn X eine nicht-negative Zufallsvariable ist mit $\mathbb{E}[X] > 100$, dann ist $Pr[X > 10] \geq 1/2$.

[ ] Wahr
[X] Falsch

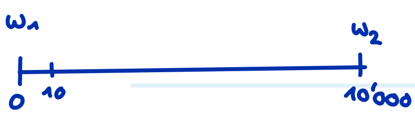
Gegenbeispiel:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ mit $\Pr[\omega_1] = 0.9$, $\Pr[\omega_2] = 0.1$

und $X(\omega_1) = 0$, $X(\omega_2) = 10'000$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = 0.9\cdot 0 + 0.1\cdot 10'000 = 1000 > 100$

$\Rightarrow \Pr[X > 10] = 0.1 < \frac{1}{2}$



Für eine Zufallsvariable X und eine Konstante a gilt: $\mathrm{Var}(X + a) = \mathrm{Var}(X) \cancel{+ a}$.

[ ] Wahr
[X] Falsch

eine Verschiebung $+a$ ändert die Zerstreuung nicht

Wenn wir unabhängig voneinander zufällig n Bälle in n Behälter werfen (wobei jeder Ball mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jedem Behälter landet) und X_1 die Anzahl der Bälle im ersten Behälter bezeichnet, dann ist $\mathbb{E}[X_1] = 1$.

[X] Wahr

[ ] Falsch

Sei I_k eine Indikatorvariable dafür, ob der k-te Ball im ersten Behälter landet

$\Rightarrow X_1 = I_1 + \ldots + I_n$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[I_1 + \ldots + I_n]$$

Linearität des Erwartungswertes

$$= \mathbb{E}[I_1] + \ldots + \mathbb{E}[I_n]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ mal}}$$

$$= 1$$

macht intuitiv Sinn: wir erwarten, dass sich n Bälle auf n Behälter gleichmässig verteilen

Faltungsformel für zwei unabhängige diskrete Zufallsvariablen

- Sei $Z = X + Y$, wobei X und Y zwei unabhängige diskrete Zufallsvariablen sind

Dann ist $f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) \; f_Y(z-x)$

Wahrscheinlichkeit dass die Summe den Wert z hat

über alle möglichen Werte für x summieren

damit die Summe z ist, muss Y folglich den Restwert $z-x$ annehmen, weil X den Wert x hat. $x + \underbrace{(z-x)}_{=y} = z$

Zwei faire, vierseitige Würfel werden geworfen. Die Zufallsvariablen X und Y geben die Augenzahlen an. Das heisst, für alle x bzw. y im Wertebereich $W_X = W_Y = \{1,2,3,4\}$ ist $f_X(x) = \frac{1}{4}$ bzw. $f_Y(y) = \frac{1}{4}$. Wir definieren $Z = X + Y$ als die Summe der Augenzahlen.

Berechne $f_Z(3)$ und $f_Z(5)$ mit der Faltungsformel.

$$
\begin{aligned}
f_Z(3) &= \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(3-x) \\
&= f_X(1)\; f_Y(3-1) + f_X(2)\; f_Y(3-2) + f_X(3)\; f_Y(3-3) + f_X(4) \cdot f_Y(3-4) \\
&= f_X(1)\; f_Y(2) + f_X(2)\; f_Y(1) + f_X(3)\; f_Y(0) + f_X(4) \cdot f_Y(-1) \\
&= \tfrac{1}{4}\;\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\;\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\;0 + \tfrac{1}{4} \cdot 0 \\
&= \underline{\underline{\tfrac{1}{8}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_Z(5) &= \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(5-x) \\
&= f_X(1)\; f_Y(5-1) + f_X(2)\; f_Y(5-2) + f_X(3)\; f_Y(5-3) + f_X(4) \cdot f_Y(5-4) \\
&= f_X(1)\; f_Y(4) + f_X(2)\; f_Y(3) + f_X(3)\; f_Y(2) + f_X(4) \cdot f_Y(1) \\
&= \tfrac{1}{4}\;\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\;\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\;\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\;\tfrac{1}{4} \\
&= \underline{\underline{\tfrac{1}{4}}}
\end{aligned}
$$

Gemeinsame Dichte: $f_{X,Y}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} Pr[X=x, Y=y]$

Randdichte: $f_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} Pr[X=x]$

$f_Y(y) \stackrel{\text{def}}{=} Pr[Y=y]$

Zusammenhang: $f_X(x) = \sum\limits_{\underbrace{y \in W_Y}} f_{X,Y}(x,y)$

Summe über alle möglichen y,
d.h der Einfluss von y fällt weg

Y \ X	1	2	3
4	0.1	0	0.1
6	0.2	0.25	0
9	0.1	0.15	0.1

$Pr[X=1, Y=9]$

$$f_X(2) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(2,y)$$
$$= f_{X,Y}(2,4) + f_{X,Y}(2,6) + f_{X,Y}(2,9)$$
$$= 0 + 0.25 + 0.15$$
$$= \underline{\underline{0.4}}$$

Gemeinsame Verteilung: $F_{X,Y}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} Pr[X \leq x, Y \leq y]$

Randverteilung: $F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} Pr[X \leq x]$

$F_Y(y) \stackrel{\text{def}}{=} Pr[Y \leq y]$

Zusammenhang $F_{X,Y}(x,y) = \sum\limits_{\substack{x' \in W_X \\ x' \leq x}} \sum\limits_{\substack{y' \in W_Y \\ y' \leq y}} f_{X,Y}(x',y')$

Y \ X	1	2	3
4	0.1	0	0.1
6	0.2	0.25	0
9	0.1	0.15	0.1

$$F_{X,Y}(2,6) = \sum_{\substack{x' \in W_X \\ x' \leq 2}} \sum_{\substack{y' \in W_Y \\ y' \leq 6}} f_{X,Y}(x',y')$$
$$= f_{X,Y}(1,4) + f_{X,Y}(1,4) + f_{X,Y}(2,4) + f_{X,Y}(2,6)$$
$$= 0.1 + 0.2 + 0 + 0.25$$
$$= \underline{\underline{0.55}}$$

Waldsche Identität

- Seien N und X zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $W_N \subseteq \mathbb{N}$, und sei $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$ die Summe von N unabhängigen Kopien von X.

Dann ist $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \; \mathbb{E}[X]$

Eine Autoversicherung analysiert die täglichen Schadensmeldungen. Die Anzahl der gemeldeten Unfälle pro Tag wird durch eine Zufallsvariable N beschrieben, die Poisson-verteilt ist mit dem Parameter $\lambda = 5$.
Die Kosten eines einzelnen Unfalls werden durch die Zufallsvariable X repräsentiert. Dabei gibt es zwei Kategorien von Schäden:

- **Totalschaden:** Kosten von **10.000 $** mit einer Wahrscheinlichkeit von 10%.
- **Teilschaden:** Kosten von **2.000 $** mit der restlichen Wahrscheinlichkeit 90%.

Berechne unter Verwendung der **Waldschen Identität** die erwarteten Gesamtkosten $\mathbb{E}[Z]$ pro Tag.

$\mathbb{E}[N] = 5$ (weil N Poisson-verteilt ist)

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \mid \text{Totalschaden}] \cdot \Pr[\text{Totalschaden}] + \mathbb{E}[X \mid \text{Teilschaden}] \cdot \Pr[\text{Teilschaden}]$ (Satz für Code Expert!)

$= 10'000 \;\; 0\,1 + 2'000 \;\; 0\,9$

$= 1000 + 1'800$

$= 2'800$

$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X]$

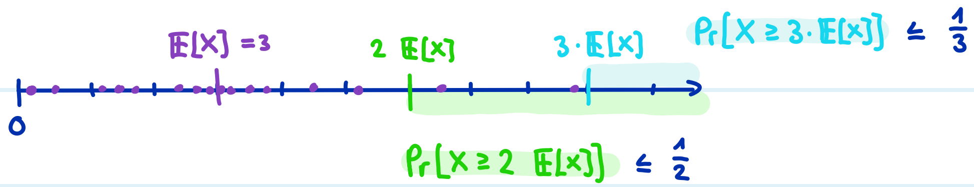
$= 5 \;\; 2'800$

$= \underline{\underline{14'000}}$

Abschätzungen

Markov. Für eine nicht-negative Zufallsvariable X und ein beliebiges $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$

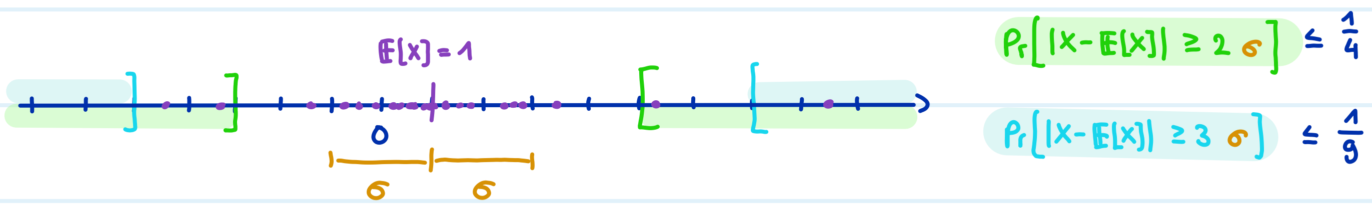
gilt: $\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$ oder anders umgeformt: $\Pr\left[X \geq t\ \mathbb{E}[X]\right] \leq \frac{1}{t}$



Intuitiv: Es ist unwahrscheinlich, dass die Werte von X viel grösser als der Erwartungswert sind

Chebyshev. Für eine Zufallsvariable X und ein beliebiges $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$ gilt:

$\Pr\left[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\right] \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2}$ oder anders umgeformt: $\Pr\left[\left|X - \mathbb{E}[X]\right| \geq t \underbrace{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}_{= \text{Standardabweichung } \sigma}\right] \leq \frac{1}{t^2}$



Intuitiv: Es ist unwahrscheinlich, dass die Werte von X weiter als t Standardabweichungen vom Erwartungswert entfernt sind

Chernoff: Für $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, wobei $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen sind mit $X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p_i)$,

gilt:

1.) $\Pr\left[X \geq (1+\delta) \cdot \mathbb{E}[X]\right] \leq e^{-\frac{1}{3}\delta^2 \cdot \mathbb{E}[X]}$ für alle $0 < \delta \leq 1$

2.) $\Pr\left[X \leq (1-\delta) \cdot \mathbb{E}[X]\right] \leq e^{-\frac{1}{2}\delta^2 \cdot \mathbb{E}[X]}$ für alle $0 < \delta \leq 1$

3.) $\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$ für alle $t \geq 2e\mathbb{E}[X]$

Aufgaben: (sehr wichtig, kommt vermutlich mehrmals bei der Prüfung dran)

Die Lebensdauer X in Stunden einer bestimmten Art von Glühbirne hat einen Erwartungswert von $\mathbb{E}[X] = 1000$.

Schätze $Pr[X \geq 2500]$ (also die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Glühbirne 2500 Stunden oder länger leuchtet) mit einer passenden Ungleichung ab.

$$Pr[X \geq 2500] \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[X]}{2500} = \frac{1000}{2500} = \underline{\underline{0.4}}$$

(Markov ist erlaubt weil X nicht-negativ ist)

Eine Maschine füllt Kaffeebohnen in Säcke ab. Das Gewicht X der Säcke schwankt leicht. Es ist bekannt, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = 500g$ beträgt und die Varianz $Var[X] = 16g^2$.

Schätze $Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq 12]$ (also die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sack um $12g$ oder mehr vom Erwartungswert abweicht) mit einer passenden Ungleichung ab.

$$Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq 12] \overset{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{Var[X]}{12^2} = \frac{16}{12^2} = \frac{1}{9} \approx \underline{\underline{0.11}}$$

Die Temperatur T in einer Stadt kann zwischen $-10^\circ C$ und $35^\circ C$ schwanken. Der Erwartungswert liegt bei $\mathbb{E}[T] = 10$.

Schätze $Pr[T \geq 30]$ mit einer passenden Ungleichung ab (oder begründe, falls keine der Ungleichungen anwendbar ist).

Markov ist nicht auf T anwendbar, weil T negative Werte annehmen kann

Für Chebyshev fehlt die Varianz...

Idee: Sei $X := T + 10$ eine nicht-negative Zufallsvariable

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[T+10] \overset{\text{Linearität}}{=} \mathbb{E}[T] + 10 = 10 + 10 = 20$$

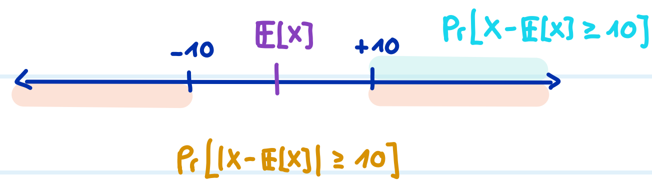
$$Pr[T \geq 30] \underset{\substack{+10 \text{ auf beiden Seiten} \\ \text{der Ungleichung}}}{=} Pr[T+10 \geq 40] \underset{X = T+10}{=} Pr[X \geq 40] \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[X]}{40} = \frac{20}{40} = \underline{\underline{0.5}}$$

Die Anzahl der verkauften Croissants X pro Tag in einem Café hat einen Erwartungswert von $\mathbb{E}[X] = 20$ und eine bekannte Varianz von $Var[X] = 16$.

Schätze $Pr[X \geq 30]$ (also die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag 30 oder mehr Croissants verkauft werden) möglichst genau mit einer passenden Ungleichung ab.

mit Markov : $Pr[X \geq 30] \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[X]}{30} = \frac{20}{30} \approx \underline{\underline{0.67}}$

mit Chebyshev :
$$
\begin{aligned}
Pr[X \geq 30] &= Pr\left[X - \mathbb{E}[X] \geq 30 - \mathbb{E}[X]\right] && (\mathbb{E}[X] \text{ auf beiden Seiten subtrahieren}) \\
&= Pr\left[X - \mathbb{E}[X] \geq 30 - 20\right] && (\mathbb{E}[X] = 20) \\
&= Pr\left[X - \mathbb{E}[X] \geq 10\right] \\
&\leq Pr\left[|X - \mathbb{E}[X]| \geq 10\right] && \text{Diese Ungleichung kommt sehr oft vor.} \\
&\overset{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{Var[X]}{10^2} \\
&= \frac{16}{100} = \underline{\underline{0.16}}
\end{aligned}
$$



Ein Cloud-Dienst hat genau $n = 1000$ registrierte Nutzer. In einer bestimmten Minute greift jeder Nutzer unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% auf den Server zu. Sei X die Anzahl der Nutzer, die in dieser Minute zugreifen. X ist eine Summe von unabhängigen Bernoulli Verteilungen, also $X \sim Bin(1000, 0.1)$.

Schätze $Pr[X \geq 150]$ (also die Wahrscheinlichkeit, dass 150 oder mehr Nutzer gleichzeitig zugreifen) mit einer passenden Ungleichung ab.

$$\mathbb{E}[X] = n\,p = 1000 \ 0 1 = 100$$

$$Var[X] = n \cdot p \cdot (1-p) = 1000 \ 0.1 \ 0 9 = 90$$

mit Markov: $Pr[X \geq 150] \overset{\text{Markov}}{\leq} \dfrac{\mathbb{E}[X]}{150} = \dfrac{100}{150} \approx \underline{\underline{0 67}}$

mit Chebyshev: $Pr[X \geq 150] = Pr[X - \mathbb{E}[X] \geq 150 - \mathbb{E}[X]]$ ($\mathbb{E}[X]$ auf beiden Seiten subtrahieren)

$= Pr[X - \mathbb{E}[X] \geq 150 - 100]$ ($\mathbb{E}[X] = 100$)

$= Pr[X - \mathbb{E}[X] \geq 50]$

$\leq Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq 50]$ (gleiche Idee wie bei vorheriger Aufgabe)

$\overset{\text{Chebyshev}}{\leq} \dfrac{Var[X]}{50^2}$

$= \dfrac{90}{2500} = \underline{\underline{0 036}}$

mit Chernoff: $Pr[X \geq 150] = Pr\left[X \geq \dfrac{150}{\mathbb{E}[X]} \cdot \mathbb{E}[X]\right]$ (mit $\dfrac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X]}$ erweitern)

$= Pr\left[X \geq \dfrac{150}{100} \cdot \mathbb{E}[X]\right]$ ($\mathbb{E}[X] = 100$)

$= Pr\left[X \geq (1 + \tfrac{1}{2})\, \mathbb{E}[X]\right]$ (weil $\dfrac{150}{100} = 1.5 = 1 + \dfrac{1}{2}$)

$\overset{\text{Chernoff (1)}}{\leq} e^{-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathbb{E}[X]}$ (wobei $\delta = \frac{1}{2}$)

$= e^{-\frac{1}{12} 100} \approx \underline{\underline{0.00024}}$ ($\mathbb{E}[X] = 100$)

Wahrscheinlichkeits-DP

Thomas ist ein Fussballspieler. In der kommenden Saison sind n Spiele geplant. Thomas darf mit Wahrscheinlichkeit p_i im i-ten Spiel mitspielen (sonst ist er ein Auswechselspieler).

Falls Thomas im i-ten Spiel spielt, dann erzielt er mit Wahrscheinlichkeit t_i ein Tor.

Um Thomas mehr zu motivieren benutzt er eine Sonderregel: Falls Thomas in den letzten drei Spielen $i-3, i-2, i-1$ ein Tor erzielt hat, dann darf er automatisch auch im i-ten Spiel spielen.

Berechne die erwartete Anzahl Tore, die Thomas schiessen wird.

Dimension: $DP[1, \dots, n+1][0, 1, 2, 3]$

Teilproblem: $DP[i, s]$ = Erwartete Anzahl Tore ab Spiel i (inklusiv), gegeben dass Thomas eine Serie von s Toren in den direkt vorherigen Spielen hatte

$$= \mathbb{E}[\text{Tore ab } i \mid \text{Serie } s]$$

Base Case: $DP[n+1, s] = 0$ für alle $1 \leq s \leq 3$

Rekursion:

$$\begin{aligned} DP[i, s] &= \mathbb{E}[\text{Tore ab } i \mid \text{Serie } s] \\ &= \left(\mathbb{E}[\text{Tore ab } i+1 \mid \text{Serie } \min\{s+1, 3\}] + 1\right) \cdot Pr[\text{schiesst Tor}] \\ &\quad + \mathbb{E}[\text{Tore ab } i+1 \mid \text{Serie } 0] \cdot Pr[\overline{\text{schiesst Tor}}] \\ &= \left(DP[i+1, \min\{s+1, 3\}] + 1\right) \cdot Pr[\text{schiesst Tor}] \\ &\quad + DP[i+1, 0] \cdot Pr[\overline{\text{schiesst Tor}}] \end{aligned}$$

$$\text{wobei} \quad Pr[\text{schiesst Tor}] = \begin{cases} t_i & \text{falls } s = 3 \\ t_i \, p_i & \text{sonst} \end{cases}$$

Reihenfolge: IMMER TOP DOWN!

Lösung: $DP[1, 0]$

Laufzeit: $O(n)$