

Erwartungswert

- $\mathbb{E}[X]$ ist der Erwartungswert von einer Zufallsvariable X
- intuitiv: ein wahrscheinlichkeits-gewichteter Durchschnitt von X
- zwei äquivalente Definitionen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X=x] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr[\omega]\end{aligned}$$

Aufgabe:

Berechne $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[Y]$. Wir übernehmen die Definitionen aus der vorherigen Aufgabe zur Erinnerung:

- **Zufallsvariable X :** $X(\omega) = \omega^2$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ mit $P(\{\omega\}) = 0,2$.
- **Zufallsvariable Y :** $Y(\omega) = \max(\omega, 3)$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$.

zwei äquivalente Definitionen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X=x] \\ &= 0 \cdot \Pr[X=0] + 1 \cdot \Pr[X=1] + 4 \cdot \Pr[X=4] \\ &= 0 + 1 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,4 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr[\omega] \\ &= X(-2) \cdot \Pr[-2] + X(-1) \cdot \Pr[-1] \\ &\quad + X(0) \cdot \Pr[0] + X(1) \cdot \Pr[1] + X(2) \cdot \Pr[2] \\ &= 4 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \sum_{y \in W_Y} y \cdot \Pr[Y=y] \\ &= 3 \cdot \Pr[Y=3] + 4 \cdot \Pr[Y=4] + 5 \cdot \Pr[Y=5] + 6 \cdot \Pr[Y=6] \\ &= 3 \cdot \frac{3}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{24}{6} \\ &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \Pr[\omega] \\ &= Y(1) \cdot \Pr[1] + Y(2) \cdot \Pr[2] + Y(3) \cdot \Pr[3] \\ &\quad + Y(4) \cdot \Pr[4] + Y(5) \cdot \Pr[5] + Y(6) \cdot \Pr[6] \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{24}{6} \\ &= 4\end{aligned}$$

- Falls $W_x \subseteq \mathbb{N}_0$, dann gibt es eine dritte äquivalente Definition.

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i] \quad (\text{braucht man sehr selten})$$

- Für eine Indikatorvariable I_A gilt: $E[I_A] = \Pr[A]$

- Beweise für die Lemmas zum Thema Wahrscheinlichkeit sind weniger wichtig Ihr müsst sie vor allem auswendig wissen und anwenden können

Linearität des Erwartungswerts

- Erinnerung LinAlg: f ist linear falls $f(x) + f(y) = f(x+y)$ und $\lambda f(x) = f(\lambda x)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$
 - Additivität*
 - Homogenität*
- E ist eine lineare Funktion: $E[X] + E[Y] = E[X+Y]$ und $\lambda E[X] = E[\lambda X]$ für $\lambda \in \mathbb{R}$
- Konstanten darf man rausziehen $E[X+b] = E[X] + E[b] = E[X] + b$
- Daraus folgt per Induktion: Sei $X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n + b$ für $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$

$$\text{dann ist } E[X] = a_1 E[X_1] + a_2 E[X_2] + \dots + a_n E[X_n] + b$$

Fünf Freunde veranstalten ein Wichteln. Jeder schreibt seinen eigenen Namen auf einen Zettel, die Zettel werden in einen Hut geworfen und gut gemischt. Dann zieht jeder blind einen Zettel heraus.

Wir wollen wissen: Wie viele Personen ziehen im Durchschnitt ihren *eigenen* Namen?

Sei $\Omega =$ Menge aller Permutationen von $(1, 2, 3, 4, 5)$

Sei X_i eine Indikatorvariable für das Ereignis "Person i zieht sich selbst"

das heisst $X_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls Person } i \text{ sich selbst zieht bei der Permutation } \omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\Rightarrow E[X_i] = \Pr[\text{Person } i \text{ zieht sich selbst}] = \frac{1}{5}$$

Sei X eine Zufallsvariable, die die Anzahl Personen zählt, die sich selbst ziehen

$$\Rightarrow X = \sum_{i=1}^5 X_i$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^5 \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{5} = \underline{\underline{1}}$$

↪
Linearität

⇒ Im Durchschnitt wird genau eine Person sich selber ziehen.

Varianz

- Intuitiv: durchschnittliche quadrierte Entfernung vom Erwartungswert
- hohe Varianz bedeutet Punkte sind weit verstreut
- Ausreißer werden stärker gewichtet durch das Quadrieren

$$\bullet \text{Var}[X] \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

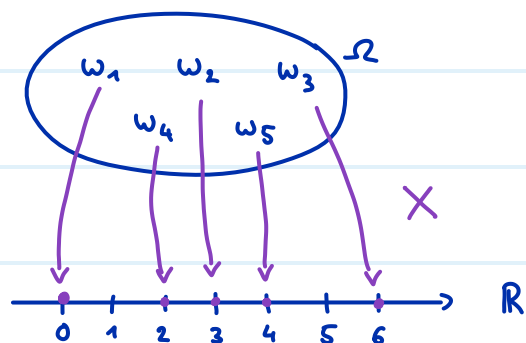
$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \quad \leftarrow \text{man nimmt meistens diese Formel}$$

$$\begin{aligned} & \text{Erwartungswert der Zufallsvariable } (X^2) \\ & - (\text{Erwartungswert der Zufallsvariable } X)^2 \end{aligned}$$

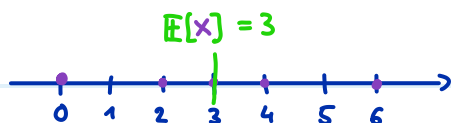
- Standardabweichung einer Zufallsvariable: $\sigma \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{\text{Var}[X]}$

(Laplace Raum)

1.)

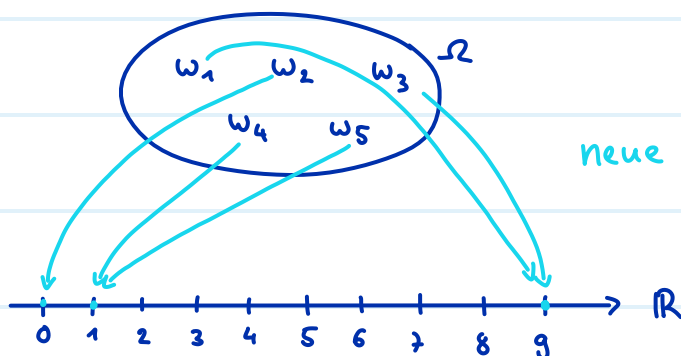


2.)



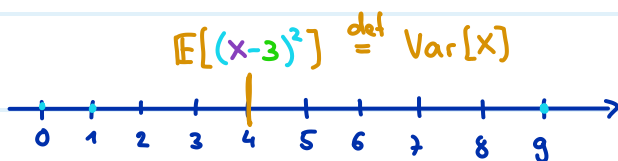
$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{x \in \Omega} x \cdot \Pr[X=x] \\
 &= 0 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 6 \cdot \frac{1}{5} \\
 &= 15 \cdot \frac{1}{5} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

3.)



neue Zufallsvariable $(X - E[X])^2$
 $= (X - 3)^2$

4.)

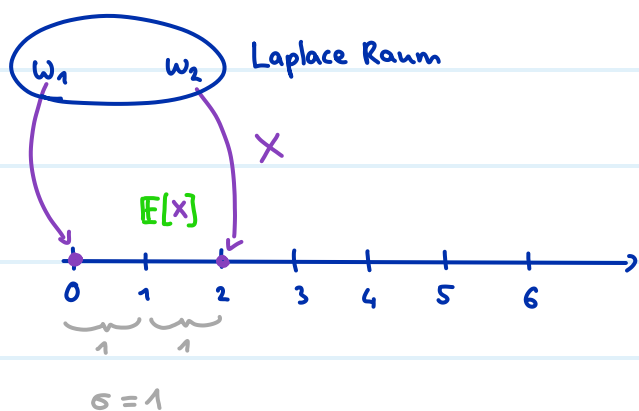


$$\begin{aligned}
 E[(X-3)^2] &= 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} + 9 \cdot \frac{2}{5} \\
 &= 10 \cdot \frac{2}{5} = 4
 \end{aligned}$$

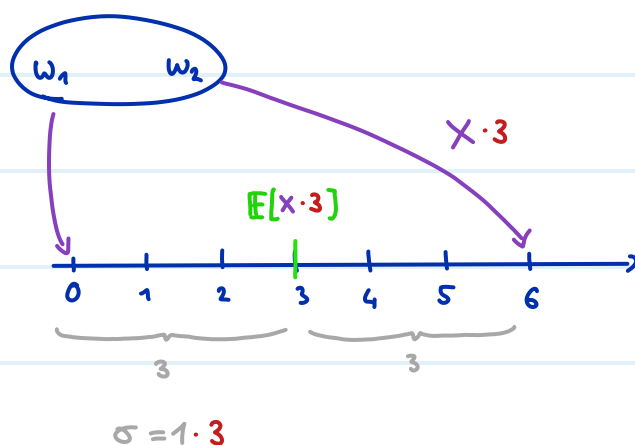
5.)

$$\begin{aligned}
 \text{Standardabweichung } \sigma &= \sqrt{\text{Var}[X]} \\
 &= \sqrt{4} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

- Es gilt: $\text{Var}[a \cdot X] = a^2 \cdot \text{Var}[X]$



Skalierung 3
 \Rightarrow

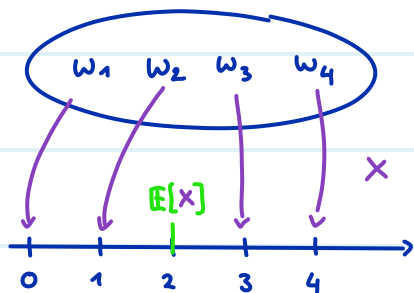


Eine lineare Skalierung bewirkt, dass sich alle Punkte um Faktor a von $E[X]$ wegbewegen

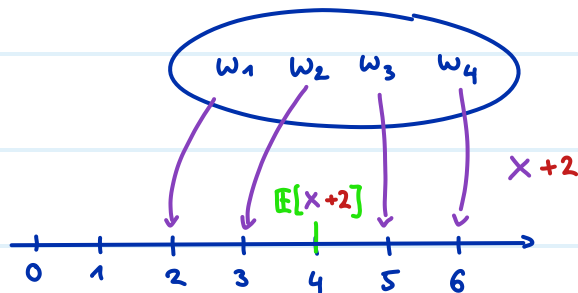
Deshalb wächst die Standardabweichung σ um Faktor a

Deshalb wächst $\text{Var}[X]$ um Faktor a^2 , weil $\text{Var}[X] = \sigma^2$

- Es gilt: $\text{Var}[X+b] = \text{Var}[X]$



Verschiebung um +2
 \Rightarrow



Die Varianz hängt nur von den Abständen zum Erwartungswert ab.

Diese Abstände bleiben gleich, wenn wir alles um $+b$ verschieben.

Deshalb bleibt auch die Varianz gleich

Berechne die Varianz $\text{Var}[Y]$ für die folgende Zufallsvariable:

- **Zufallsvariable** $Y: Y(\omega) = \max(\omega, 3)$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$ für alle $\omega \in \Omega$.

$$\mathbb{E}[Y] = 4 \quad (\text{von vorheriger Aufgabe})$$

Zwei äquivalente Formeln für $\text{Var}[Y]$

$$\text{Var}[Y] = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]$$

$$= \mathbb{E}[(Y - 4)^2]$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} (Y(\omega) - 4)^2 \Pr[\omega]$$

$$= (Y(1) - 4)^2 \frac{1}{6} + (Y(2) - 4)^2 \frac{1}{6} + (Y(3) - 4)^2 \frac{1}{6} \\ + (Y(4) - 4)^2 \frac{1}{6} + (Y(5) - 4)^2 \frac{1}{6} + (Y(6) - 4)^2 \frac{1}{6}$$

$$= (3 - 4)^2 \frac{1}{6} + (3 - 4)^2 \frac{1}{6} + (3 - 4)^2 \frac{1}{6} \\ + (4 - 4)^2 \frac{1}{6} + (5 - 4)^2 \frac{1}{6} + (6 - 4)^2 \frac{1}{6}$$

$$= 1 \frac{1}{6} + 1 \frac{1}{6} + 1 \frac{1}{6} + 0 + 1 \frac{1}{6} + 4 \frac{1}{6}$$

$$= \frac{8}{6}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)^2 \Pr[\omega]$$

$$= Y(1)^2 \cdot \frac{1}{6} + Y(2)^2 \cdot \frac{1}{6} + Y(3)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ + Y(4)^2 \cdot \frac{1}{6} + Y(5)^2 \cdot \frac{1}{6} + Y(6)^2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} \\ + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{104}{6}$$

$$= 17 + \frac{1}{3}$$

$$\text{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$$

$$= 17 + \frac{1}{3} - 4^2$$

$$= 17 + \frac{1}{3} - 16$$

$$= \frac{4}{3}$$

Wichtige Verteilungen

Bernoulli: Eine Zufallsvariable mit genau zwei möglichen Werten, entweder $X = 1$ mit

Erfolgswahrscheinlichkeit p und $X = 0$ mit Fehlerwahrscheinlichkeit $1-p$

- $\Pr[X=1] = p$ und $\Pr[X=0] = 1-p$

- Dichtefunktion: $f_X(x) = \begin{cases} p & \text{if } x = 1 \\ 1-p & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

- $E[X] = p$

Herleitung: $E[X] = \sum_{x \in \mathcal{W}_X} x \Pr[X=x] = 1 \Pr[X=1] + 0 \cdot \Pr[X=0] = \Pr[X=1] = p$

- $\text{Var}[X] = p(1-p)$

Herleitung: $E[X^2] = \sum_{x \in \mathcal{W}_{X^2}} x \Pr[X^2=x] = 1 \Pr[X^2=1] + 0 \cdot \Pr[X^2=0] = \Pr[X^2=1] = \Pr[X=1] = p$

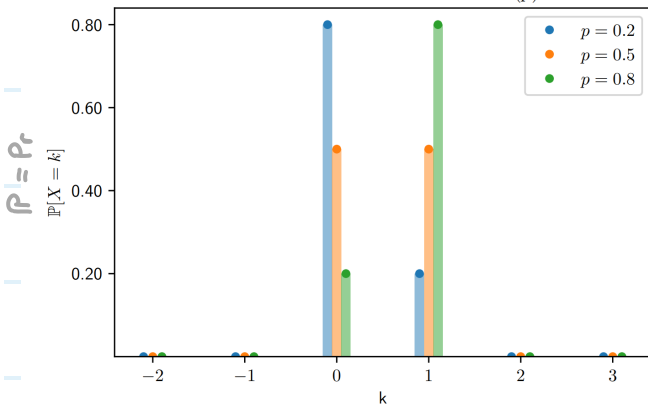
$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

- Bsp Münzwurf $\sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$

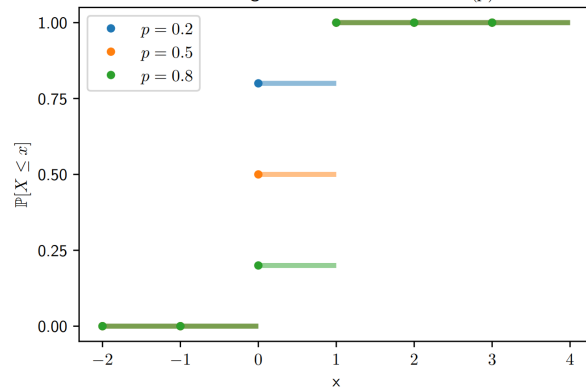
Zufällige Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist durch 3 teilbar $\sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{3})$

= Dichtefunktion

Gewichtsfunktionen von $X \sim \text{Ber}(p)$



Verteilungsfunktionen von $X \sim \text{Ber}(p)$



Binomial Es gibt n unabhängige Versuche, wobei jeder Erfolgswahrscheinlichkeit p hat.

Wir zählen die Anzahl Erfolge insgesamt.

- $W_X = \{0, 1, \dots, n\}$
- $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ wobei $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$
das heißt, wir wiederholen ein Bernoulli Experiment n mal
- die Dichtefunktion sagt, wie wahrscheinlich es ist, dass wir genau x Erfolge haben

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x (1-p)^{n-x} & \text{falls } x \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Möglichkeiten für x Erfolge
aus n Versuchen

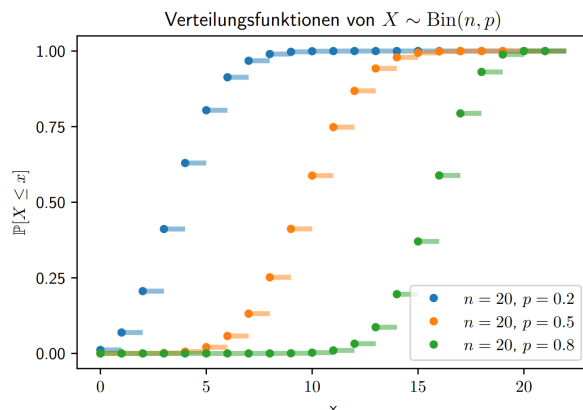
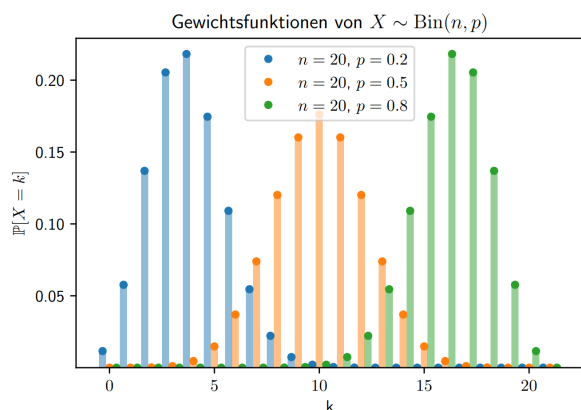
die x Erfolge haben
Wahrscheinlichkeit p

die $(n-x)$ Misserfolge haben
Wahrscheinlichkeit $(1-p)$

- $\mathbb{E}[X] = n p$ Herleitung: $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = \underbrace{p + \dots + p}_{n \text{ mal}} = n p$
- $\text{Var}[X] = n \cdot p(1-p)$ Herleitung: $\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1 + \dots + X_n] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n] = \underbrace{p(1-p) + \dots + p(1-p)}_{n \text{ mal}} = n p(1-p)$
nur erlaubt wegen
Unabhängigkeit

• Bsp Anzahl Köpfe bei 20 Münzwürfen $\sim \text{Bin}(20, \frac{1}{2})$

Anzahl einsen bei 10 mal würfeln $\sim \text{Bin}(10, \frac{1}{6})$



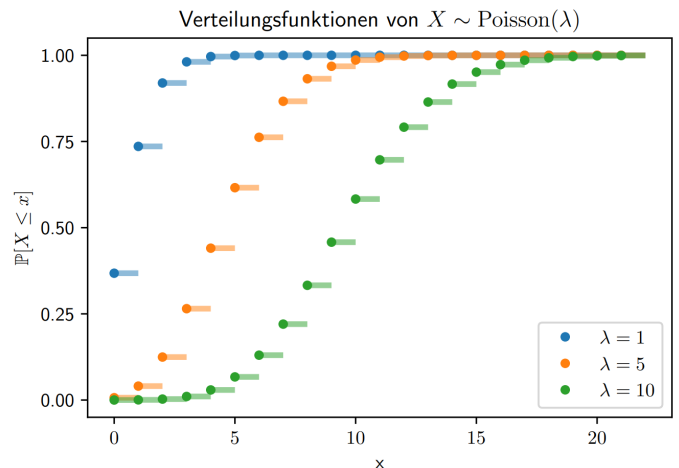
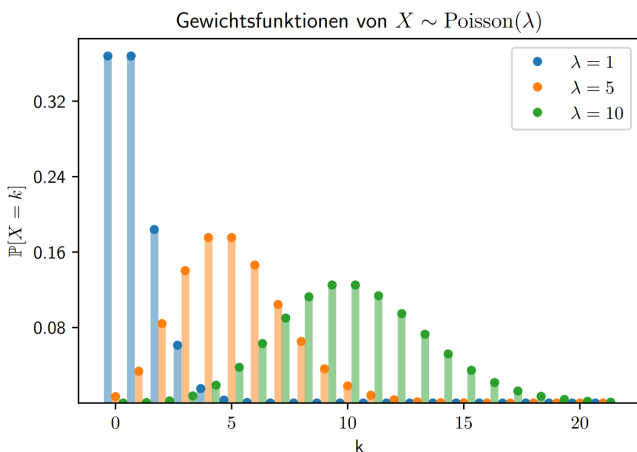
Poisson: Es gibt sehr viele unabhängige Bernoulli Experimente mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit

Wir kennen nur $\lambda =$ durchschnittliche Anzahl Erfolge in einem Intervall

- die Dichtefunktion sagt, wie wahrscheinlich es ist, dass wir genau i Erfolge haben in einem Intervall

$$f_X(i) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} & \text{falls } i \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $E[X] = \lambda$
- $\text{Var}[X] = \lambda$
- Bsp Anzahl Hai Angriffe auf Menschen im nächsten Jahr
Anzahl Bitflips im Speicher in der nächsten Sekunde



Geometrisch: Wie oft müssen wir ein Bernoulli-Experiment wiederholen, bis wir zum ersten mal Erfolg haben?

- Wertebereich $W_X = \{1, 2, 3, \dots\}$
- die Dichtefunktion sagt, wie wahrscheinlich es ist, dass wir genau i Versuche brauchen bis zum ersten Erfolg

$$f_X(i) = \begin{cases} (1-p)^{i-1} p & \text{falls } i \in \{1, 2, 3, \dots\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die $(i-1)$ Misserfolge haben
Wahrscheinlichkeit $(1-p)$

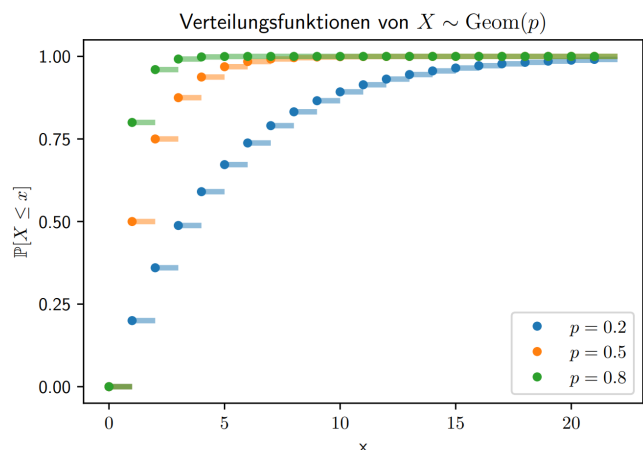
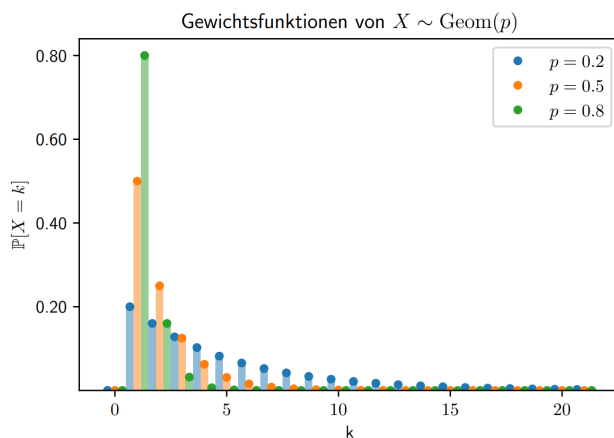
der eine Erfolg hat
Wahrscheinlichkeit p

- die Verteilungsfunktion sagt, wie wahrscheinlich es ist, dass wir nach spätestens i Versuchen einen Erfolg haben

$$F_X(i) = 1 - \underbrace{(1-p)^i}_{\text{Gegenwahrscheinlichkeit}}$$

- $E[X] = \frac{1}{p}$
 - $\text{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$
- } Herleitung: unendliche Summen, siehe Analysis

- Gedächtnislos $\Pr[X \geq s+t \mid X > s] = \Pr[X \geq t]$ für alle $s, t \in \mathbb{N}$
Dass ein Erfolg bisher noch nicht eingetreten ist ($X > s$), hat keinen Einfluss darauf, wie lange es ab jetzt noch bis zum ersten Erfolg dauert.



negativ Binomial Wie oft müssen wir ein Bernoulli-Experiment wiederholen, bis wir

zum n-ten mal Erfolg haben?

- Wertebereich $W_X = \{1, 2, 3, \dots\}$
- die Dichtefunktion sagt, wie wahrscheinlich es ist, dass wir genau k Versuche brauchen bis zum n-ten Erfolg

$$f_X(k) = \begin{cases} \binom{k-1}{n-1} \cdot p^n \cdot (1-p)^{k-n} & \text{falls } k \in \{n, n+1, n+2, \dots\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Möglichkeiten für n-1 Erfolge aus k-1 Versuchen. Der letzte Versuch wird ignoriert, weil es immer ein Erfolg sein muss per def

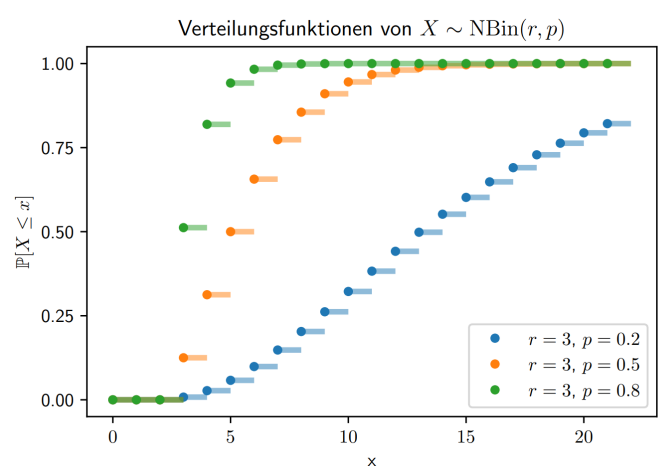
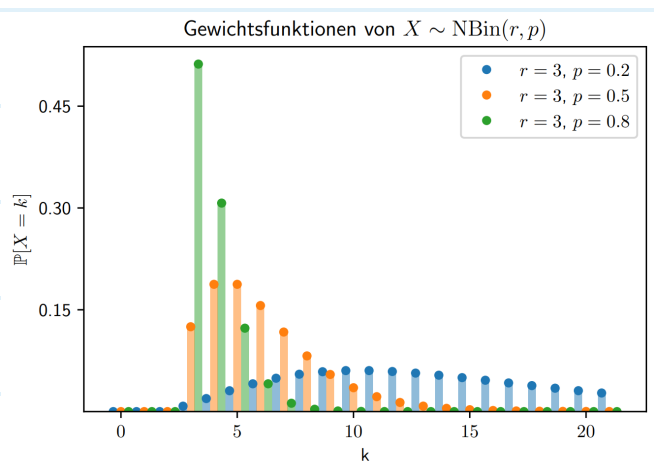
die n Erfolge haben Wahrscheinlichkeit p

die (k-n) Misserfolge haben Wahrscheinlichkeit (1-p)

- $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ wobei $X_i \sim \text{Geo}(p)$
das heißt, wir wiederholen ein geometrisches Experiment n mal

- $E[X] = \frac{n}{p}$ Herleitung: $E[X] = E[X_1 + \dots + X_n] = E[X_1] + \dots + E[X_n] = \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p} = \frac{n}{p}$
- $\text{Var}[X] = n \cdot \frac{1-p}{p^2}$ Herleitung: $\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1 + \dots + X_n] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n] = \frac{1-p}{p^2} + \dots + \frac{1-p}{p^2} = n \cdot \frac{1-p}{p^2}$
nur erlaubt wegen Unabhängigkeit

- Bsp Anzahl Münzwürfe bis zum 4. Kopf
Anzahl befragte Menschen bis zum 7 Brillenträger



Aufgaben:

In einem Netzwerk mit 100 unabhängigen Servern fällt jeder Server mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% aus. Wie viele Server fallen erwartungsgemäss aus? Und was ist die Varianz?

$$X \sim \text{Bin}(100, 0.02)$$

$$E[X] = n \cdot p = 100 \cdot 0.02 = \underline{\underline{2}}$$

$$\text{Var}[X] = n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot 0.02 \cdot 0.98 = \underline{\underline{1.96}}$$

80% aller Passagiere haben ein gültiges Ticket. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kontrolleur innerhalb der ersten 4 Fahrkartenkontrollen einen Schwarzfahrer findet?

$$X \sim \text{Geo}(0.2)$$

$$F_X(4) = 1 - (1-0.2)^4 \approx \underline{\underline{0.59}} \quad \text{allgemeine Formel } F_X(i) = 1 - (1-p)^i$$

Ein Patient wird positiv getestet mit Wahrscheinlichkeit 10%. Was ist die Varianz dieses Experiments?

$$X \sim \text{Bernoulli}(0.1)$$

$$\text{Var}[X] = p \cdot (1-p) = 0.1 \cdot 0.9 = \underline{\underline{0.09}}$$

Ein Buch mit 500 Seiten enthält 500 zufällig verteilte Druckfehler. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für exakt 2 Druckfehler auf einer Seite?

$$X \sim \text{Poisson}(1) \quad \text{weil } \lambda = \frac{500}{500} = 1$$

$$f_X(2) = \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!} = \frac{1}{2e} \approx \underline{\underline{0.18}} \quad \text{allgemeine Formel } f_X(i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}$$

Wie wahrscheinlich ist es, dass wir genau 3 Primzahlen würfeln aus 6 Versuchen?

$$X \sim \text{Bin}(6, 0.5) \quad \text{weil } p = \text{Pr}[\text{Primzahl gewürfelt}] = \text{Pr}[\{2, 3, 5\}] = 0.5$$

$$\text{allgemeine Formel } f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$f_X(3) = \binom{6}{3} \cdot 0.5^3 \cdot (1-0.5)^{6-3} = 20 \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^3 \approx \underline{\underline{0.31}}$$

Ein Basketballspieler trifft seine Freiwürfe mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%. Er will 3 Treffer erzielen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er insgesamt genau 6 Versuche benötigt?

$$X \sim \text{NBin}(3, 0.5)$$

$$\text{allgemeine Formel } f_X(k) = \binom{k-1}{n-1} p^n \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$f_X(6) = \binom{6-1}{3-1} \cdot 0.5^3 \cdot (1-0.5)^{6-3} = \binom{5}{2} \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^3 = 10 \cdot 0.5^6 \approx \underline{\underline{0.16}}$$

Unabhängige Zufallsvariablen

- Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n sind unabhängig, falls für alle $(x_1, \dots, x_n) \in W_{X_1} \times \dots \times W_{X_n}$ gilt: $\Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n]$
- Intuitiv: X und Y sind unabhängig, falls der Wert von X nichts über den Wert von Y aussagt.
- Falls X und Y unabhängig sind, dann sind auch $f_1(X)$ und $f_2(Y)$ unabhängig, für beliebige Funktionen f_1 und f_2

Aufgaben:

Wir werfen eine faire Münze zweimal hintereinander.

- Zufallsvariable X : Das Ergebnis des **ersten** Wurfs (0 für Zahl, 1 für Kopf).
- Zufallsvariable Y : Das Ergebnis des **zweiten** Wurfs (0 für Zahl, 1 für Kopf).

Frage: Sind X und Y unabhängig?

Alle $(x, y) \in W_X \times W_Y$ ausprobieren:

$$\Pr[X=0, Y=0] = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \Pr[X=0] \Pr[Y=0] \quad \checkmark$$

$$\Pr[X=0, Y=1] = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \Pr[X=0] \Pr[Y=1] \quad \checkmark$$

$$\Pr[X=1, Y=0] = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \Pr[X=1] \Pr[Y=0] \quad \checkmark$$

$$\Pr[X=1, Y=1] = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \Pr[X=1] \Pr[Y=1] \quad \checkmark$$

$\Rightarrow X$ und Y sind unabhängig

Wir werfen einen fairen Würfel zweimal.

- Zufallsvariable X : Die Augenzahl des **ersten** Wurfs.
- Zufallsvariable S : Die **Summe** beider Augenzahlen.

Frage: Sind X und S unabhängig?

nein, weil $\Pr[X=6, S=2] = 0 \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36} = \Pr[X=6] \cdot \Pr[S=2]$

Wichtig: Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_n gilt:

- $E[X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n] = E[X_1] \cdot E[X_2] \cdot \dots \cdot E[X_n]$
- $\text{Var}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + \dots + \text{Var}[X_n]$

Aufgabe

Ein Anleger betrachtet drei verschiedene Aktien, X, Y und Z , für die er jeweils einen Erwartungswert von **100\$** und eine Varianz (Risiko) von **25\$** basierend auf historischen Daten einschätzt. Gehe davon aus, dass die Kursbewegungen der Firmen **unabhängig** voneinander sind.

Wie hoch ist der erwartete Gesamtwert und die Varianz des Portfolios $X + Y + Z$ und des Portfolios $3X$?

$$E[X+Y+Z] = E[X] + E[Y] + E[Z] = 100 + 100 + 100 = 300$$

benutzt die Unabhängigkeit

$$\text{Var}[X+Y+Z] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + \text{Var}[Z] = 25 + 25 + 25 = 75$$

$$E[3X] = 3 \cdot E[X] = 3 \cdot 100 = 300$$

$$\text{Var}[3X] = 3^2 \cdot \text{Var}[X] = 9 \cdot 25 = 225$$

weil $\text{Var}[aX] = a^2 \cdot \text{Var}[X]$

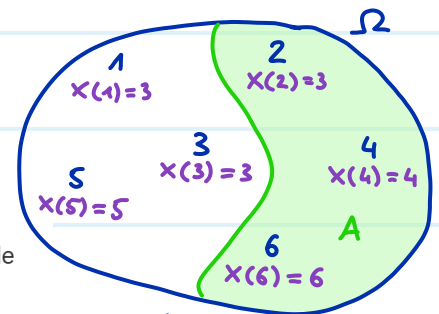
⇒ gleicher Erwartungswert aber $X+Y+Z$ hat eine viel kleinere Varianz

Bedingte Zufallsvariablen

• Notation: $\Pr[X = x | A] = \frac{\Pr[\{\omega \in A \mid X(\omega) = x\}]}{\Pr[A]}$ für ein Ereignis A

$$\Pr[X \leq x | A] = \frac{\Pr[\{\omega \in A \mid X(\omega) \leq x\}]}{\Pr[A]}$$

$$E[X | A] = \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x | A]$$



Wir werfen einen Würfel. Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $X(\omega) = \max(\omega, 3)$. Das Ereignis A enthält alle geraden Zahlen, und das Ereignis B enthält alle Zahlen ≤ 3 .

Berechne $\Pr[X = 3 | A] = \frac{\Pr[\{\omega \in A \mid X(\omega) = 3\}]}{\Pr[A]} = \frac{\Pr[\{2, 3\}]}{\Pr[\{2, 4, 6\}]} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Berechne $\Pr[X \leq 2 | B] = \frac{\Pr[\{\omega \in B \mid X(\omega) \leq 2\}]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[\{3\}]}{\Pr[\{1, 2, 3\}]} = \frac{0}{1} = 0$

Wichtigster Satz für Code Expert:

Seien A_1, \dots, A_n paarweise disjunkte Ereignisse mit $\Pr[A_i] > 0$ und $\Omega = A_1 \cup \dots \cup A_n$

$$\text{Dann ist } \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X|A_i] \cdot \Pr[A_i]$$

Wahrscheinlichkeits DP

Ein Dieb läuft einer Strasse mit n Häusern entlang und versucht dabei, in jedes Haus einzubrechen. Das Einbrechen in Haus i gelingt ihm mit Wahrscheinlichkeit p_i . Durch erfolgreiches Einbrechen erhöht sich sein Gewinn um g_i und er läuft zum nächsten Haus. Falls ihm das Einbrechen nicht gelingt, muss er sofort zwei Häuser weiter fliehen, das heisst, er probiert als nächstes in Haus $i + 2$ einzubrechen.

Was ist der erwartete Gewinn?

Dimension: $DP[1, \dots, n]$

Teilproblem: $DP[i]$ = Erwarteter Gewinn wenn der Dieb bei Haus i startet

Base case: $DP[n] = p_n g_n$

Rekursion: $DP[i] = \mathbb{E}[\text{Gewinn ab Haus } i]$

$$= \mathbb{E}[\text{Gewinn ab Haus } i \mid \text{Einbruch in Haus } i \text{ gelingt}] \cdot \Pr[\text{Einbruch in Haus } i \text{ gelingt}] \\ + \mathbb{E}[\text{Gewinn ab Haus } i \mid \text{Einbruch in Haus } i \text{ gelingt nicht}] \cdot \Pr[\text{Einbruch in Haus } i \text{ gelingt nicht}]$$

$$= (g_i + DP[i+1]) \cdot p_i + \underbrace{DP[i+2]}_{=0 \text{ falls } i+2 > n} \cdot (1-p_i) \quad \text{für } 1 \leq i < n$$

Reihenfolge: IMMER TOP DOWN!

Lösung: $DP[1]$

Laufzeit: $O(n)$