

Drei Ereignisse A, B, C sind genau dann unabhängig, wenn $P[A \cap B \cap C] = P[A]P[B]P[C]$.

☐ WAHR

☒ FALSCH

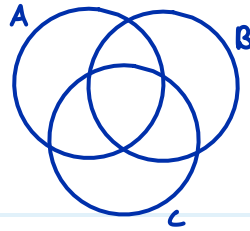
es muss zusätzlich gelten dass $P[A \cap B] = P[A] P[B]$
und $P[A \cap C] = P[A] P[C]$
und $P[B \cap C] = P[B] P[C]$

Für drei beliebige Ereignisse A, B, C gilt $P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - P[A \cap B] - P[A \cap C] - P[B \cap C] + P[A \cap B \cap C]$.

☒ WAHR

☐ FALSCH

Siebformel



Wir betrachten folgendes Zufallsexperiment: Wir werfen zunächst einen 6-seitigen Würfel und danach eine Münze. Dieses Zufallsexperiment lässt sich mit der Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, K, Z\}$ beschreiben.

☐ WAHR

☒ FALSCH

zuerst Würfeln dann Münzwurf
 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{K, Z\}$
 $= \{(1, K), \dots, (6, K), (1, Z), \dots, (6, Z)\}$

Für zwei beliebige Ereignisse A, B mit $P[A] > 0$ und $P[B] > 0$ gilt $P[A|B]P[B] = P[B|A]P[A]$.

☒ WAHR

☐ FALSCH

$$\begin{aligned} P[A|B] P[B] &= \frac{P[A \cap B]}{P[B]} P[B] && (\text{def. bedingte Wahrscheinlichkeit}) \\ &= P[A \cap B] && (\text{kürzen}) \\ &= P[B \cap A] && (\cap \text{ ist kommutativ}) \\ &= \frac{P[B \cap A]}{P[A]} P[A] && (\text{erweitern mit } \frac{P[A]}{P[A]}) \\ &= P[B|A] P[A] && (\text{def. bedingte Wahrscheinlichkeit}) \end{aligned}$$

Man wirft einen sechsseitigen Würfel. Dann sind die Ereignisse "A = Ergebnis ist gerade" und "B = Ergebnis ist 6" unabhängig.

- ☐ WAHR intuitiv: falls B eintritt, dann muss auch A eintreten
- ☒ FALSCH mathematisch: $Pr[A \cap B] = Pr[\{6\}] = \frac{1}{6}$

$$Pr[A] Pr[B] = Pr[\{2,4,6\}] \cdot Pr[\{6\}] = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{6} \neq \frac{1}{12}, \text{ daher sind A und B abhängig}$$

Wenn A, B, C drei Ereignisse sind, die $P[A \cap B] = P[A]P[B]$, $P[A \cap C] = P[A]P[C]$ und $P[B \cap C] = P[B]P[C]$ erfüllen, dann sind A, B, C unabhängig.

- ☐ WAHR es muss zusätzlich gelten dass $P[A \cap B \cap C] = P[A] P[B] \cdot P[C]$
- ☒ FALSCH

Wenn A, B, C drei unabhängige Ereignisse sind, dann gilt $P[A \cap B] = P[A]P[B]$, $P[B \cap C] = P[B]P[C]$ und $P[A \cap C] = P[A]P[C]$. ("genau dann wenn" wäre falsch)

- ☒ WAHR diese Richtung gilt, aber die Umkehrung nicht
- ☐ FALSCH

Wir haben 180 zufällig ausgewählte Personen in einem Raum. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei von ihnen am selben Tag Geburtstag haben, ist kleiner als $1/2$.

- ☐ WAHR
- ☒ FALSCH Geburtstagsproblem aus der Vorlesung

Angenommen, G ist ein Graph, der eine Eulertour enthält, und die Anzahl Knoten von G ist gerade. Dann enthält G ein perfektes Matching.

- ☐ WAHR Gegenbeispiel:

- ☒ FALSCH



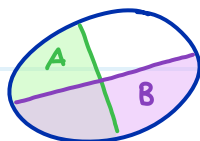
Wenn A und B unabhängige Ereignisse sind, dann ist $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$.

(häufiger Fehler)

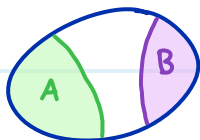
- [] WAHR
- ~~[]~~ FALSCH

unabhängig $\neq$ disjunkt

unabhängig: $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$



disjunkt: $A \cap B = \emptyset$



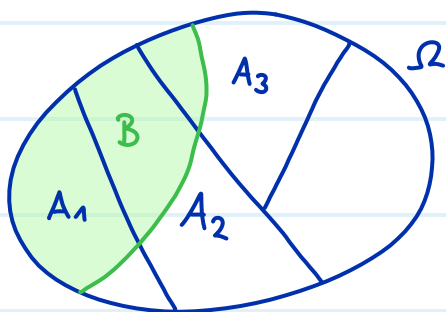
Notation: $P[A] = \Pr[A]$

Passwort: probability

Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit

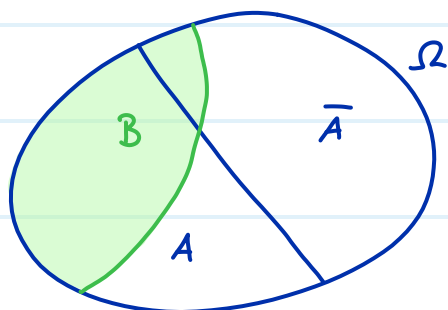
Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ und ein Ereignis $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$

gilt:
$$Pr[B] = \sum_{i=1}^n Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]$$



Meistens verwenden wir einen Spezialfall davon:

Für Ereignisse A und B gilt:
$$Pr[B] = Pr[B|A] \cdot Pr[A] + Pr[B|\bar{A}] \cdot Pr[\bar{A}]$$



Satz von Bayes

Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ und ein Ereignis $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$

mit $Pr[B] > 0$ gilt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$Pr[A_i|B] = \frac{Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n Pr[B|A_j] \cdot Pr[A_j]}$$

Meistens verwenden wir einen Spezialfall davon:

Für Ereignisse A und B mit $\Pr[B] > 0$ gilt:

$$\Pr[A|B] = \frac{\Pr[B|A] \Pr[A]}{\Pr[B|A] \Pr[A] + \Pr[B|\bar{A}] \Pr[\bar{A}]}$$

• Beweise nicht sehr wichtig. Man sollte es vor allem anwenden können.

Aufgabe:

Im Rahmen einer Studie werden Schüler befragt, ob sie schon einmal abgeschrieben haben. Um Anonymität zu gewährleisten, benutzt man das folgende Verfahren: Jeder Befragte wirft erst einmal im Geheimen für sich einen fairen Würfel. Hat er eine Eins gewürfelt, so antwortet er immer mit Nein, im Falle einer Sechs immer mit Ja. In allen anderen Fällen sagt er die Wahrheit. Wir nehmen an, dass sich alle an diese Anweisung halten. In der Umfrage antworten schliesslich $\frac{2}{3}$ der Teilnehmer mit Ja.

a) Wie hoch ist der Anteil der Schüler, die schon einmal gespickt haben?

Wir betrachten einen fixen Schüler und definieren folgende Ereignisse:

S = Schüler hat schon einmal gespickt

$\bar{S}$ = Schüler hat noch nie gespickt

J = Schüler beantwortet die Umfrage mit Ja

$\bar{J}$ = Schüler beantwortet die Umfrage mit Nein

Aus der Aufgabe ist $\Pr[J] = \frac{2}{3}$ und $\Pr[N] = \frac{1}{3}$ gegeben

Wir wollen $\Pr[S]$ bestimmen.

Idee: $\Pr[J] = \Pr[J|S] \Pr[S] + \Pr[J|\bar{S}] \Pr[\bar{S}]$

→ Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
 \Pr[J|S] &= \Pr[J|S \text{ n Würfel zeigt } 1] \cdot \Pr[\text{Würfel zeigt } 1] \\
 &\quad + \Pr[J|S \text{ n Würfel zeigt } 6] \cdot \Pr[\text{Würfel zeigt } 6] \\
 &\quad + \Pr[J|S \text{ n Würfel zeigt } 2/3/4/5] \cdot \Pr[\text{Würfel zeigt } 2/3/4/5] \\
 &= 0 \cdot \frac{1}{6} \quad + \quad 1 \cdot \frac{1}{6} \quad + \quad 1 \cdot \frac{4}{6} \\
 &\quad \text{(sagt immer Nein bei 1)} \quad \text{(sagt immer Ja bei 6)} \quad \text{(sagt immer Wahrheit = Ja bei 2/3/4/5)} \\
 &= \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pr[J|\bar{S}] &= \Pr[J|\bar{S} \text{ n Würfel zeigt } 1] \cdot \Pr[\text{Würfel zeigt } 1] \\
 &\quad + \Pr[J|\bar{S} \text{ n Würfel zeigt } 6] \cdot \Pr[\text{Würfel zeigt } 6] \\
 &\quad + \Pr[J|\bar{S} \text{ n Würfel zeigt } 2/3/4/5] \cdot \Pr[\text{Würfel zeigt } 2/3/4/5] \\
 &= 0 \cdot \frac{1}{6} \quad + \quad 1 \cdot \frac{1}{6} \quad + \quad 0 \cdot \frac{4}{6} \\
 &\quad \text{(sagt immer Nein bei 1)} \quad \text{(sagt immer Ja bei 6)} \quad \text{(sagt immer Wahrheit = Nein bei 2/3/4/5)} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Alles einfügen in den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\Pr[J] = \Pr[J|S] \Pr[S] + \Pr[J|\bar{S}] \Pr[\bar{S}]$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \cdot \Pr[S] + \frac{1}{6} \Pr[\bar{S}] \quad (\text{berechnete Werte einsetzen})$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \cdot p + \frac{1}{6} \cdot (1-p) \quad (\text{Sei } p = \Pr[S], \text{ dann ist } \Pr[\bar{S}] = 1-p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{5}{6} p + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} p$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{6} = \frac{4}{6} p$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow \Pr[S] = \frac{3}{4}$, das heisst $\frac{3}{4}$ aller Schüler haben schon einmal gespickt

- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler, der in der Umfrage mit Ja geantwortet hat, tatsächlich schon einmal abgeschrieben hat?

Bayes

$$Pr[S|J] = \frac{Pr[J|S] \cdot Pr[S]}{Pr[J|S] \cdot Pr[S] + Pr[J|\bar{S}] \cdot Pr[\bar{S}]}$$

$$= \frac{Pr[J|S] \cdot Pr[S]}{Pr[J]}$$

(Satz der totalen Wahrscheinlichkeit)

$$= \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}$$

(berechnete Werte einsetzen)

$$= \frac{15}{16}$$

Ziegenproblem mit ungeschicktem Moderator

Du stehst wieder in einer Spielshow vor drei verschlossenen Türen. Hinter einer Tür ist ein Auto, hinter den anderen beiden stehen Ziegen.

1. Du wählst **Tür 1**.
2. Der Moderator, der *eigentlich* weiss, wo das Auto steht, stolpert über ein Kabel, stürzt nach vorn und reisst dabei aus Versehen **Tür 3** auf.
3. Das Publikum hält den Atem an... doch Glück im Unglück: Hinter der versehentlich geöffneten Tür 3 steht eine **Ziege**. Das Spiel ist also nicht ruiniert.
4. Der Moderator fragt: "Nun gut... Tür 3 ist offen und es ist eine Ziege. Möchten Sie bei Ihrer Tür 1 bleiben oder zu Tür 2 wechseln?"

Erhöht sich deine Gewinnchance auf das Auto, wenn du jetzt auf Tür 2 wechselst?

Annahme: Moderator öffnet Türe 2 oder 3 mit 50/50 % Wahrscheinlichkeit

A_i = Auto hinter Türe i , Z_3 = Moderator öffnet Türe 3 zufällig UND es ist eine Ziege

$$\bullet Pr[Z_3|A_1] = \frac{1}{2}, Pr[Z_3|A_2] = \frac{1}{2}, Pr[Z_3|A_3] = 0$$

$$\bullet Pr[A_1|Z_3] = \frac{Pr[Z_3|A_1] \cdot Pr[A_1]}{Pr[Z_3|A_1] \cdot Pr[A_1] + Pr[Z_3|A_2] \cdot Pr[A_2] + Pr[Z_3|A_3] \cdot Pr[A_3]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$\Rightarrow$ wechseln lohnt sich nicht, die Gewinnchance bleibt gleich

Unabhängigkeit: A und B heißen unabhängig falls $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$

• Falls $\Pr[B] > 0$, dann ist die Bedingung $\Pr[A] = \Pr[A|B]$ äquivalent dazu

• Intuitiv: Ob A eintritt sagt nichts aus über B , und umgekehrt

• $A_1, A_2, \dots, A_n$ heißen unabhängig falls für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\Pr\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] = \prod_{i \in I} \Pr[A_i]$$

• Seien $A_1, A_2, \dots, A_n$ unabhängig. Die Unabhängigkeit bleibt unter folgenden Operationen erhalten:

Negation: A_i wird zu $\bar{A}_i$

Schnittmenge: A_i und A_j wird zu $A_i \cap A_j$

Vereinigung: A_i und A_j wird zu $A_i \cup A_j$

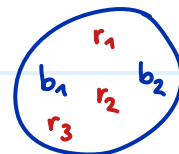
Aufgabe

In einer Urne befinden sich 3 rote und 2 blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln gezogen. Wir definieren die Ereignisse:

- R_1 : "Die erste gezogene Kugel ist rot."
- B_2 : "Die zweite gezogene Kugel ist blau."

Untersuche die Ereignisse R_1 und B_2 auf stochastische Unabhängigkeit für die folgenden zwei Fälle:

- Die erste Kugel wird nach dem Ziehen wieder **zurückgelegt**.
- Die erste Kugel wird **nicht zurückgelegt**.



a) mit zurücklegen: Sei $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, b_1, b_2\} \times \{r_1, r_2, r_3, b_1, b_2\}$

$$\Pr[R_1] = \frac{3}{5} \quad \text{und} \quad \Pr[B_2] = \frac{2}{5} \quad \text{und} \quad \Pr[R_1 \cap B_2] = \frac{3 \cdot 2}{25} = \frac{6}{25}$$

$$\text{Test: } Pr[R_1] \cdot Pr[B_2] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = Pr[R_1 \cap B_2] \quad \checkmark$$

$\Rightarrow R_1$ und B_2 sind unabhängig

b) ohne zurücklegen:

$$Pr[R_1] = \frac{3}{5}$$

$$Pr[B_2] \xrightarrow{\text{Satz der totalen Wahrscheinlichkeit}} Pr[B_2|R_1] Pr[R_1] + Pr[B_2|\bar{R}_1] Pr[\bar{R}_1]$$

$$= \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$Pr[R_1 \cap B_2] = Pr[B_2|R_1] Pr[R_1]$$

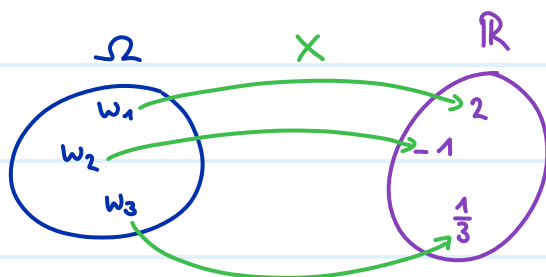
$$= \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$\text{Test: } Pr[R_1] \cdot Pr[B_2] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} \neq \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = Pr[R_1 \cap B_2] \quad \times$$

$\Rightarrow R_1$ und B_2 sind abhängig

Zufallsvariablen

- Eine Zufallsvariable ist eine Funktion $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die jedem Elementarereignis ω eine reelle Zahl zuordnet



- Der Wertebereich $W_X = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega \ X(\omega) = x\} = X(\Omega)$ ↗ andere Notation
ist die Menge aller möglichen Werte von X

- Abkürzungen der Notation für Ereignisse die von X abhängig sind:

$$X = x \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

$$X \leq x \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$$

$$X \in S \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in S\}$$

$$X=x, Y=y \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \text{ and } Y(\omega) = y\}$$

- Eine Indikatorvariable für ein Ereignis A ist eine Zufallsvariable $I_A: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$
wobei
$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt: $\Pr[I_A = 1] = \Pr[A]$

und $\Pr[I_A = 0] = \Pr[\bar{A}]$

Aufgabe:

Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ der Ergebnisraum eines fairen, sechsseitigen Würfels. Die Wahrscheinlichkeit ist $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$ für alle $\omega \in \Omega$.

Wir definieren die drei Zufallsvariablen $X, Y, Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt:

- $X(\omega) = 2\omega$

- $Y(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \omega \text{ gerade ist} \\ 1, & \text{falls } \omega \text{ ungerade ist} \end{cases}$

Y ist eine Indikatorvariable für $A = \{1, 3, 5\}$

- $Z(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \omega \leq 2 \\ 1, & \text{falls } \omega > 2 \end{cases}$

Z ist eine Indikatorvariable für $B = \{3, 4, 5, 6\}$

Berechne $\Pr[X \leq 5]$

$$= \Pr[\{1, 2\}] = \frac{1}{3}$$

Berechne $\Pr[Y = 2]$

$$= \Pr[\{2, 3, 5\}] = \frac{1}{2}$$

Sind die Ereignisse $Z=0$ und $Y=1$ unabhängig?

$$\Pr[Z=0] \Pr[Y=1] = \Pr[\{1, 2\}] \Pr[\{1, 3, 5\}]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$W_X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$W_Y = \{0, 1\}$$

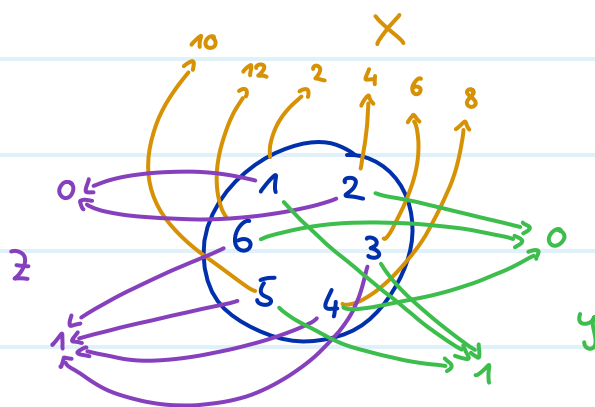
$$W_Z = \{0, 1\}$$

$$\Pr[Z=0 \cap Y=1] = \Pr[\{1, 2\} \cap \{1, 3, 5\}]$$

$$= \Pr[\{1\}]$$

$$= \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow$ Ja, die Ereignisse sind unabhängig



Dichte- und Verteilungsfunktion

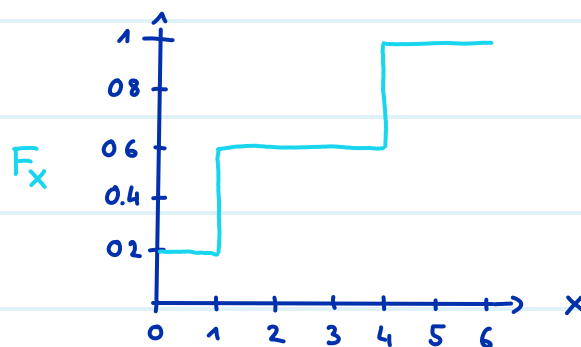
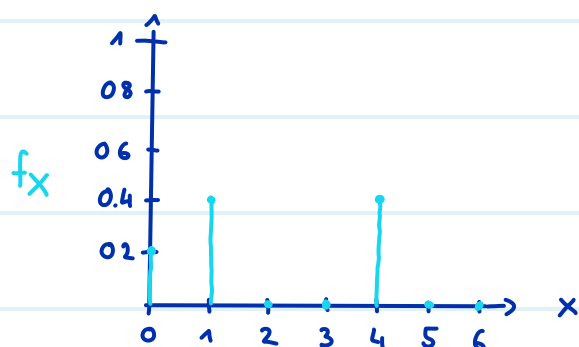
- Sei X eine Zufallsvariable
- f_X ist die Dichtefunktion von X , wobei $f_X(x) = \Pr[X=x]$
- F_X ist die Verteilungsfunktion von X , wobei $F_X(x) = \Pr[X \leq x]$

Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ mit der Laplace-Wahrscheinlichkeit $P(\{\omega\}) = 0,2$ für alle $\omega \in \Omega$.

Wir definieren die Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$X(\omega) = \omega^2$$

Zeichne die Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion im Diagramm ein.



Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit der Laplace-Wahrscheinlichkeit $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$ für alle $\omega \in \Omega$.

Wir definieren die Zufallsvariable $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$Y(\omega) = \max(\omega, 3)$$

Zeichne die Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion im Diagramm ein.

