

Färbungen

Satz von Brooks: vollständiger Graph Kreis ungerader Länge maximaler Grad

Sei G zusammenhängend und $G \neq K_n$ und $G \neq C_{2n+1}$, dann ist $\chi(G) \leq \Delta(G)$ und eine Färbung mit $\leq \Delta(G)$ Farben kann in Zeit $O(|E|)$ gefunden werden

(Beweis dazu ist nicht sehr wichtig)

Sei G ein 3-zusammenhängender, 4-regulärer Graph. Es ist bekannt, dass G keinen K_5 als Teilgraphen enthält. Gib die Schranke für $\chi(G)$ gemäss Brooks an.

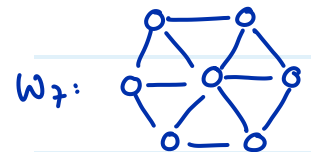
3-zusammenhängend $\Rightarrow$ zusammenhängend

4-regulär $\Rightarrow \Delta(G) = 4$, $G \neq C_{2n+1}$

4-regulär und $K_5 \not\subseteq G \Rightarrow G$ ist nicht vollständig

$\Rightarrow$ Bedingungen für Brooks sind erfüllt, deshalb folgt $\chi(G) \leq 4$

Ein Rad-Graph W_n besteht aus einem Kreis C_{n-1} und einem zusätzlichen "Zentrumsknoten", der mit allen Knoten des Kreises verbunden ist. Gib die Schranke für $\chi(W_7)$ und für $\chi(W_4)$ gemäss Brooks an.



W_7 ist zusammenhängend, $W_7 \neq C_{2n+1}$, $W_7 \neq K_n$, $\Delta(G) = 6 \xrightarrow{\text{Brooks}} \chi(G) \leq 6$

$W_4 = K_4$, Brooks darf nicht angewendet werden!



Sei G ein zusammenhängender Graph mit $\Delta(G) = 4$, der genau 16 Brücken hat. Gib die Schranke für $\chi(G)$ gemäss Brooks an.

G ist zusammenhängend

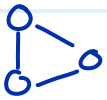
G hat 16 Brücken $\Rightarrow G \neq C_{2n+1}$, $G \neq K_n$

$\Rightarrow$ Bedingungen für Brooks sind erfüllt, deshalb folgt $\chi(G) \leq 4$

Planare Graphen

G ist planar $\Leftrightarrow$ man kann G so zeichnen, dass sich keine Kanten überkreuzen

Satz: In jedem planaren Graphen gibt es einen Knoten mit $\text{Grad} \leq 5$.



planar? $\rightarrow$ Ja



planar? $\rightarrow$ Ja

C_n

planar? $\rightarrow$ Ja

K_7

planar? $\rightarrow$ Nein
(alle Grade ≥ 6)

letzte Woche: Falls jeder induzierte Subgraph einen Knoten mit Grad höchstens k hat, dann gibt es eine Färbung mit $k+1$ Farben.

auf planare Graphen angewendet:

- Jeder induzierte Subgraph ist auch planar, weil wenn wir einen Knoten entfernen, gibt es danach immer noch keine Kantenüberkreuzungen

- $k = 5$

$$\Rightarrow \chi(G) \leq 6$$

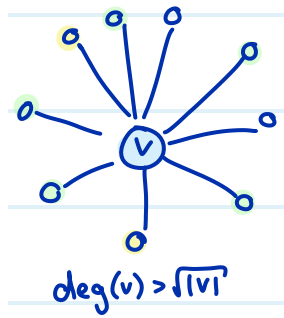
Vierfarbensatz: Jeder planare Graph ist 4-färbbar. (Das heisst $\chi(G) \leq 4$)

(Beweis ist nicht Vorlesungsstoff)

Färbungs-Algorithmus für 3-färbbare Graphen

Algorithm 1 Färbungsalgorithmus für 3-färbbare Graphen

- 1: **while** es gibt einen Knoten v , der mehr als $\sqrt{|V|}$ **ungefärbte** Nachbarn hat **do**
- 2: färbe v mit einer neuen Farbe
- 3: färbe alle Nachbarn von v mit insgesamt zwei neuen Farben (ist möglich per Annahme)
- 4: **end while**
- 5: Lösche alle gefärbten Knoten
- 6: Der Greedy-Algorithmus findet eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben, da der Restgraph einen Maximalgrad $\Delta \leq \sqrt{|V|}$ hat.



In der while Schleife werden höchstens $3\sqrt{|V|}$ viele Farben benutzt, weil es höchstens $\sqrt{|V|}$ Iterationen gibt, weil in jeder Iteration mehr als $\sqrt{|V|}$ Knoten entfernt werden, aber es gibt nur $\sqrt{|V|} \cdot \sqrt{|V|} = |V|$ viele Knoten insgesamt. Dazu kommen $\leq \sqrt{|V|} + 1$ weitere Farben vom Greedy Algorithmus.

- Total: höchstens $4\sqrt{|V|} + 1 \leq O(\sqrt{|V|})$ Farben
- Laufzeit: $O(|V| + |E|)$

Unabhängigkeit von der Länge eines kürzesten Kreises und $\chi(G)$

- $\forall k, r \in \mathbb{N}$: Es gibt einen Graphen ohne einen Kreis mit Länge $\leq k$ aber mit $\chi(G) \geq r$.
- Beweis ist sehr egal

Wahrscheinlichkeiten

Ergebnismenge: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

Elementarereignis: ω_i

Wahrscheinlichkeit: $Pr[\omega_i]$ zwischen 0 und 1

und es muss gelten dass $\sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega] = 1$

Bsp. Würfel würfeln: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Pr[1] = \frac{1}{6}$

Münze zwei mal werfen: $\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$, $Pr[KZ] = \frac{1}{4}$

Ereignis: eine Teilmenge $E \subseteq \Omega$

wir definieren $Pr[E] = \sum_{\omega \in E} Pr[\omega]$

und es gilt: $0 \leq Pr[E] \leq 1$

Komplementärereignis von E : $\bar{E} = \Omega \setminus E$

$$Pr[\bar{E}] = 1 - Pr[E]$$

Bsp. Erster Wurf ist Kopf: $E = \{KK, KZ\}$, $Pr[E] = Pr[KK] + Pr[KZ] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

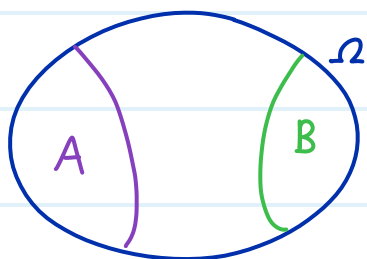
Erster Wurf ist nicht Kopf: $\bar{E} = \Omega \setminus E = \{ZK, ZZ\}$, $Pr[\bar{E}] = Pr[ZK] + Pr[ZZ] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Leeres Ereignis: $Pr[\emptyset] = 0$

Sicheres Ereignis: $Pr[\Omega] = 1$

Bsp. Erster Wurf ist Kopf oder erster Wurf ist nicht Kopf: $Pr[E \cup \bar{E}] = Pr[\Omega] = 1$

Additionssatz: Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n$ gilt $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$
 das heisst $A_i \cap A_j = \emptyset$ falls $i \neq j$



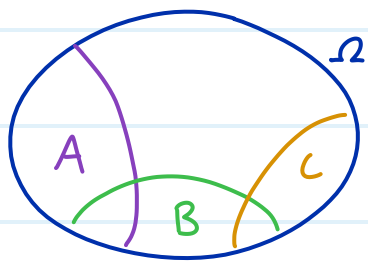
Falls sich A und B nicht überschneiden, dann ist die
 Fläche von $A \cup B = \text{Fläche von } A + \text{Fläche von } B$

Bsp: Würfel zeigt eine gerade Zahl. $A = \{2, 4, 6\}$ $\Pr[A] = \frac{3}{6}$

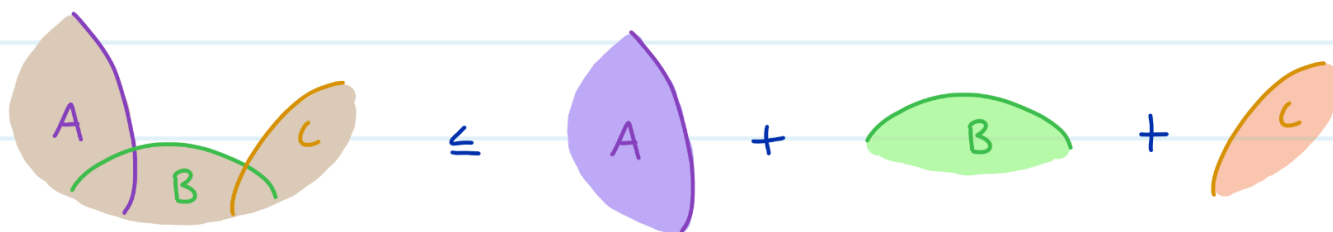
Würfel zeigt eine eins. $B = \{1\}$ $\Pr[B] = \frac{1}{6}$

weil $A \cap B = \emptyset$ folgt $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Union-Bound: Für Mengen $A_1, \dots, A_n$ gilt $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$



Fläche von $A \cup B \cup C \leq \text{Fläche von } A + \text{Fläche von } B + \text{Fläche von } C$



Bsp Würfel zeigt eine Zahl ≤ 2 : $A = \{1, 2\}$ $Pr[A] = \frac{2}{6}$

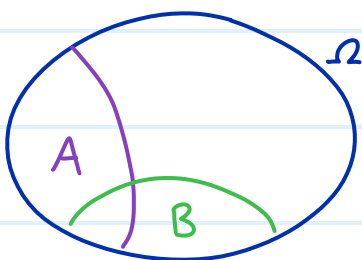
Würfel zeigt eine Primzahl: $B = \{2, 3, 5\}$ $Pr[B] = \frac{3}{6}$

$$Pr[A \cup B] \leq Pr[A] + Pr[B] = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

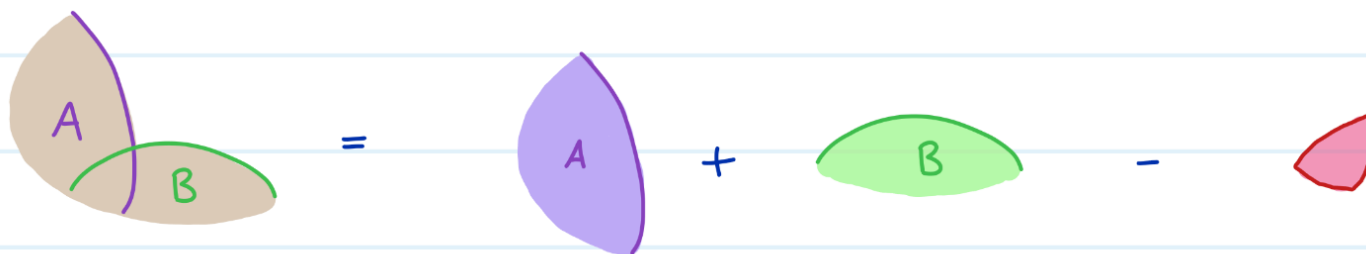
Siebformel: $Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B] - Pr[A \cap B]$

$$Pr[A \cup B \cup C] = Pr[A] + Pr[B] + Pr[C] - Pr[A \cap B] - Pr[B \cap C] - Pr[A \cap C] + Pr[A \cap B \cap C]$$

⋮ (allgemeine Formel muss man nicht auswendig können)



Fläche von $A \cup B$ = Fläche von A + Fläche von B - Fläche von $A \cap B$



Laplace-Raum: Falls Ω endlich ist und alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind

$$\text{Es gilt: } Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Bsp Würfeln: jede Zahl ist gleich wahrscheinlich

$$\text{Würfel zeigt eine Primzahl: } E = \{2, 3, 5\} \quad Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Aufgaben

In einer Manufaktur für Präzisionsbauteile werden 100 Chips hergestellt. 5 Chips haben einen Defekt am Gehäuse (E_1), 3 Chips haben einen Softwarefehler (E_2) und 2 Chips haben beide Defekte gleichzeitig. Ein Chip wird zufällig ausgewählt.

1. Warum ist der klassische Additionssatz $Pr[E_1 \cup E_2] = Pr[E_1] + Pr[E_2]$ hier **nicht** direkt anwendbar?

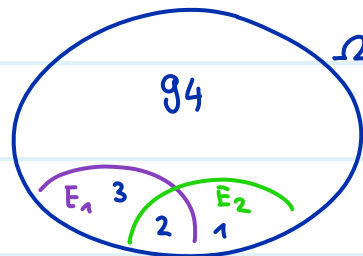
weil E_1 und E_2 nicht disjunkt sind Es gibt 2 Chips die beide Defekte haben

2. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der gewählte Chip mindestens einen Defekt hat.

Siebformel

$$\begin{aligned}
 Pr[E_1 \cup E_2] &= Pr[E_1] + Pr[E_2] - Pr[E_1 \cap E_2] \\
 &= \frac{|E_1|}{|\Omega|} + \frac{|E_2|}{|\Omega|} - \frac{|E_1 \cap E_2|}{|\Omega|} \\
 &= \frac{5}{100} + \frac{3}{100} - \frac{2}{100} \\
 &= \frac{6}{100} \\
 &= 0.06
 \end{aligned}$$

jeder Chip hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, ausgewählt zu werden $\Rightarrow$ Laplace-Raum



3. Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Komplementärereignis $\overline{E_1 \cup E_2}$ und interpretiere dessen Bedeutung im Sachkontext.

$$\begin{aligned}
 Pr[\overline{E_1 \cup E_2}] &= 1 - Pr[E_1 \cup E_2] \\
 &= 1 - 0.06 \\
 &= 0.94
 \end{aligned}$$

Interpretation: der Chip hat keinen der beiden Defekte

Ein Zahlenschloss hat 4 Ringe, jeder mit den Ziffern 0 bis 9. Ein Dieb weiß, dass die richtige Kombination nur aus **geraden** Ziffern besteht (0, 2, 4, 6, 8), aber er weiß nicht, welche. Er probiert zufällig eine Kombination aus, die nur aus geraden Ziffern besteht.

1. Definiere die Ergebnismenge Ω für den Versuch des Diebes und bestimme deren Mächtigkeit $|\Omega|$.

→ 4-faches kartesisches Produkt

$$\text{Sei } \Omega = \{0, 2, 4, 6, 8\}^4 = \{(\underbrace{0, 0, 0, 0}_{w_1}, \underbrace{0, 0, 0, 2}_{w_2}, \dots, (8, 8, 8, 8))\}$$

die Menge aller möglichen Kombinationen

$$|\Omega| = 5^4 \quad (5 \text{ Möglichkeiten für den ersten Ring} * \dots * 5 \text{ Möglichkeiten für den vierten Ring})$$

$$= 625$$

2. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit $Pr[E]$, dass er das Schloss im ersten Versuch öffnet? (Gehe von einem Laplace-Raum aus).

es gibt nur eine richtige Kombination, deshalb ist $|E| = 1$

$$Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{1}{625}$$

Zufallsexperiment	Laplace	Nicht-Laplace
Ein fairer sechsseitiger Würfel wird geworfen. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.	X	[] $Pr[1] = Pr[2] = \dots = Pr[6] = \frac{1}{6}$
Ein Reißnagel wird geworfen. Er landet auf dem Kopf oder auf der Seite.	[]	X $Pr[\text{Kopf}] \neq Pr[\text{Seite}]$
Aus einer Urne mit 3 roten und 7 blauen Kugeln wird eine Kugel gezogen. $\Omega = \{\text{rot}, \text{blau}\}$.	[]	X $Pr[\text{rot}] = 0.3$ $\neq$ $Pr[\text{blau}] = 0.7$
Ein Glücksrad mit 8 exakt gleich großen, nummerierten Sektoren wird gedreht.	X	[] Alle Sektoren gleich wahrscheinlich
Zwei faire Münzen werden geworfen. Man zählt die Anzahl der Köpfe. $\Omega = \{0, 1, 2\}$.	[]	X $Pr[0] = Pr[2] = 0.25$ $\neq$ $Pr[1] = 0.5$

KK → 2
KZ → 1
ZK → 1
ZZ → 0

Zufallsexperiment

Laplace

Nicht-Laplace

Eine Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal „Kopf“ erscheint. Man zählt die Anzahl der Würfe. $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$.

✗

$$Pr[1] = \frac{1}{2}$$

≠

$$Pr[2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Ein Würfel wird zweimal geworfen. Man betrachtet als Ergebnis das Maximum der beiden Augenzahlen (z. B. bei 3 und 5 ist das Ergebnis 5).

✗

$$Pr[1] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

≠

beide Würfel müssen 1 sein, damit das Maximum 1 ist

$$Pr[2] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{3}{36}$$

$\boxed{1} \boxed{2} \quad \boxed{2} \boxed{1} \quad \boxed{2} \boxed{2}$

Simpson-Paradoxon

Eine Fahrschule hat zwei Prüfungstage mit folgenden Ergebnissen:

Für die Männer:

Für die Frauen:

	bestanden	gesamt
Tag 1	10	10
Tag 2	20	30

	bestanden	gesamt
Tag 1	70	80
Tag 2	10	20

Waren Männer oder Frauen am Tag 1 besser?

$$Pr[\text{Mann besteht am Tag 1}] = \frac{10}{10} = 1$$

$$Pr[\text{Frau besteht am Tag 1}] = \frac{70}{80} = 0.875$$

⇒ Männer waren am Tag 1 besser

Waren Männer oder Frauen am Tag 2 besser?

$$Pr[\text{Mann besteht am Tag 2}] = \frac{20}{30} = 0.66$$

$$Pr[\text{Frau besteht am Tag 2}] = \frac{10}{20} = 0.5$$

⇒ Männer waren am Tag 2 besser

Waren Männer oder Frauen insgesamt über beide Tage hinweg besser?

$$\Pr[\text{Mann besteht}] = \frac{10 + 20}{10 + 30} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\Pr[\text{Frau besteht}] = \frac{70 + 10}{80 + 20} = \frac{80}{100} = \frac{8}{10} = 0.8$$

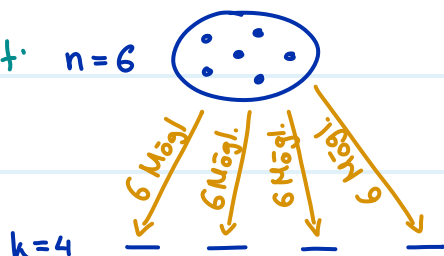
⇒ Insgesamt waren Frauen besser!

Kombinatorik: wir ziehen k Elemente aus einer Menge mit n Elementen

	geordnet (Reihenfolge wichtig)	ungeordnet (Reihenfolge egal)
mit zurücklegen (mit Wiederholungen)	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne zurücklegen (ohne Wiederholungen)	$\underline{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \dots (n-k+1)$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

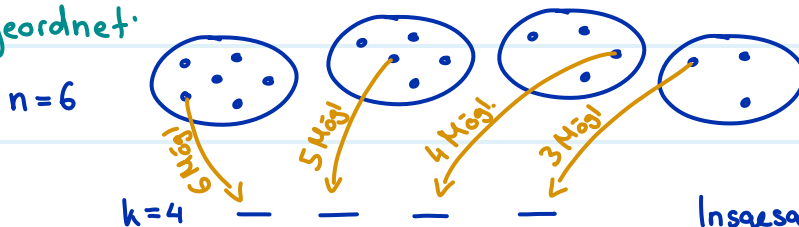
Lernt diese Tabelle auswendig!

mit zurücklegen, geordnet: $n=6$



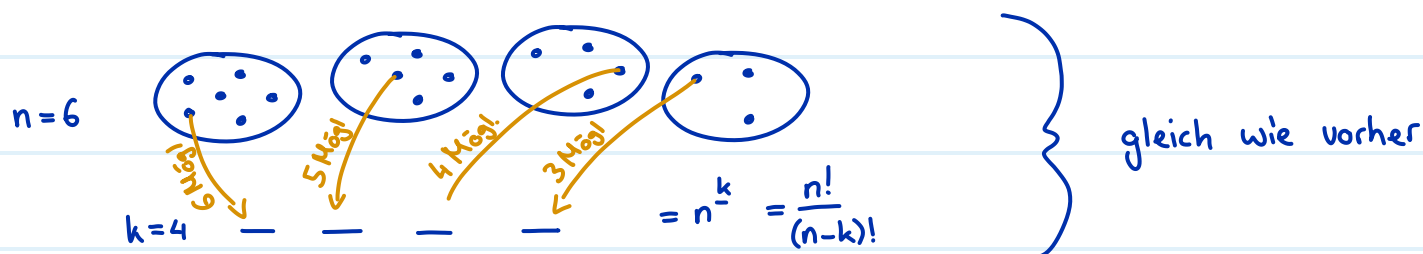
$$\text{Insgesamt } 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = n^k$$

ohne zurücklegen, geordnet:



$$\text{Insgesamt } 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = n^{\underline{k}}$$

ohne zurücklegen, ungeordnet:



Falls $\{a_1, \dots, a_k\}$ eine ungeordnete Menge ist, dann gibt es $k!$ dazugehörige geordnete Sequenzen (Anwendung vom Fall ohne zurücklegen, geordnet)

Deshalb müssen wir noch durch $k!$ teilen: Insgesamt $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{k}$

Nützliche Eigenschaft: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ Bsp $\binom{5}{4} = \binom{5}{1}$

k Elemente zu wählen ist dasselbe, wie den Rest $(n-k)$ auszuwählen und weg zu werfen

Aufgaben

Aus einer Klasse mit 10 Schülern sollen 3 Schüler ausgewählt werden, die beim Packen der Koffer helfen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Gruppe zusammenzustellen?

ohne zurücklegen, ungeordnet: $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! (10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}$

$= \frac{10 \cdot \cancel{8}^3 \cdot \cancel{8}^4}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = \underline{\underline{120}}$

Ein Passwort besteht aus 6 Zeichen. Zur Verfügung stehen die 26 Buchstaben des Alphabets. Wie viele Passwörter gibt es, wenn jeder Buchstabe mehrfach vorkommen darf?

mit zurücklegen, geordnet: 26^6

Wie viele Passwörter gibt es, wenn jeder Buchstabe nur einmal vorkommen darf?

ohne zurücklegen, geordnet: 26^6 ($= 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$)

Bei einem Pferderennen starten 6 Pferde. Es wird gewettet, welche Pferde als 1., 2. und 3. durchs Ziel gehen. Wie viele verschiedene Ergebnisse für die ersten drei Plätze gibt es?

ohne zurücklegen, geordnet: $6^{\underline{3}} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{\underline{120}}$

Ein Professor möchte aus 7 Studenten eine Arbeitsgruppe von 4 Personen bilden. Innerhalb dieser Gruppe soll zusätzlich ein Sprecher bestimmt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

ohne zurücklegen, ungeordnet: $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 35$
 = 35 mögliche Vierergruppen

dazu gibt es jeweils 4 mögliche Sprecher

$\Rightarrow 4 \cdot 35 = \underline{\underline{140}}$

In einem Eissalon gibt es 5 Sorten. Wie viele verschiedene Becher mit 3 Kugeln sind möglich, wenn die Reihenfolge egal ist und Sorten mehrfach gewählt werden dürfen?

mit zurücklegen, ungeordnet: $\binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \underline{\underline{35}}$

Ein Gremium besteht aus 5 Männern und 5 Frauen. Es soll ein Ausschuss von 3 Personen gebildet werden, in dem mindestens eine Frau vertreten ist. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

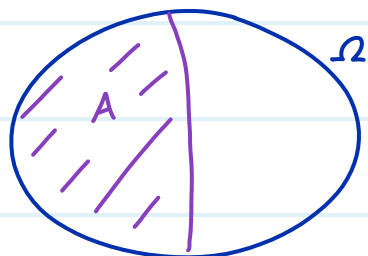
ohne zurücklegen, ungeordnet: $\binom{10}{3} - \binom{5}{3}$
 alle Möglichen Dreiergruppen ohne alle Möglichkeiten 3 Männer zu wählen
 $= \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} - \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \dots = 120 - 10 = \underline{\underline{110}}$

Wie viele verschiedene natürliche Zahlen lassen sich als Produkt von drei verschiedenen Primzahlen aus der Menge {2, 3, 5, 7, 11, 13} bilden?

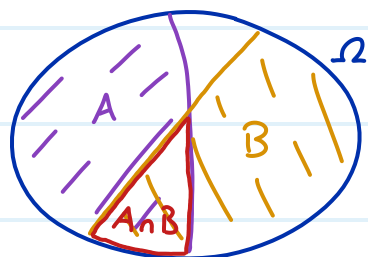
ohne zurücklegen, ungeordnet: $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \frac{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{\underline{20}}$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten:

- Wie wahrscheinlich ist das Ereignis A , wenn wir schon wissen, dass das Ereignis B eingetreten ist?
- Definition: $\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$
- Man sagt: "A gegeben B"
- $\Pr[A|B]$ ist nur definiert falls $\Pr[B] > 0$
- Intuition:



$$\Pr[A] = \text{Anteil von } A \text{ an } \Omega = \frac{\text{Fläche von } A}{\text{Fläche von } \Omega} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$



$$\Pr[A|B] = \text{Anteil von } A \text{ an } B = \frac{\text{Fläche von } A \cap B}{\text{Fläche von } B} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$$

Wenn wir wissen, dass B eingetreten ist, dann ändert sich die Wahrscheinlichkeit von A auf $\frac{1}{3}$

Bsp Würfel zeigt eine ungerade Zahl: $A = \{1, 3, 5\}$ $\Pr[A] = \frac{1}{2}$

Würfel zeigt eine Primzahl: $B = \{2, 3, 5\}$ $\Pr[B] = \frac{1}{2}$

$$\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[\{3, 5\}]}{\Pr[B]} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Aufgaben: Beweise durch Einsetzen der Definition

$$\Pr[A|\Omega] = \Pr[A]$$

$$\Pr[A|\Omega] = \frac{\Pr[A \cap \Omega]}{\Pr[\Omega]} = \frac{\Pr[A]}{\Pr[\Omega]} = \frac{\Pr[A]}{1} = \Pr[A]$$

$\xrightarrow{\text{def } \Pr[A|B]}$ $\xrightarrow{A \cap \Omega = A}$ $\xrightarrow{\Pr[\Omega] = 1}$

$$\Pr[A|A] = 1$$

$$\Pr[A|A] = \frac{\Pr[A \cap A]}{\Pr[A]} = \frac{\Pr[A]}{\Pr[A]} = 1$$

$\xrightarrow{\text{def } \Pr[A|B]}$ $\xrightarrow{A \cap A = A}$

$$\Pr[A|\bar{A}] = 0$$

$$\Pr[A|\bar{A}] = \frac{\Pr[A \cap \bar{A}]}{\Pr[\bar{A}]} = \frac{\Pr[\emptyset]}{\Pr[\bar{A}]} = \frac{0}{\Pr[\bar{A}]} = 0$$

$\xrightarrow{\text{def } \Pr[A|B]}$ $\xrightarrow{A \cap \bar{A} = \emptyset}$ $\xrightarrow{\Pr[\emptyset] = 0}$

$$\Pr[A|B] \Pr[B] = \Pr[B|A] \Pr[A]$$

$$\Pr[A|B] \Pr[B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} \cdot \Pr[B] = \Pr[A \cap B] = \Pr[B \cap A] = \frac{\Pr[B \cap A]}{\Pr[A]} \cdot \Pr[A] = \Pr[B|A] \Pr[A]$$

$\xrightarrow{\text{def } \Pr[A|B]}$ $\xrightarrow{\text{kürzen}}$ $\xrightarrow{A \cap B = B \cap A}$ $\xrightarrow{\text{erweitern mit } \frac{\Pr[A]}{\Pr[A]}}$ $\xrightarrow{\text{def } \Pr[B|A]}$

$$\Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A] \cdot \Pr[B|A] \Pr[C|A \cap B]$$

$$\Pr[A] \cdot \Pr[B|A] \Pr[C|A \cap B] = \Pr[A] \cdot \frac{\Pr[B \cap A]}{\Pr[A]} \cdot \frac{\Pr[C \cap (A \cap B)]}{\Pr[A \cap B]} \quad \text{def } \Pr[A|B]$$

$$= \Pr[B \cap A] \cdot \frac{\Pr[C \cap (A \cap B)]}{\Pr[A \cap B]} \quad \Pr[A] \text{ kürzen}$$

$$= \Pr[A \cap B] \cdot \frac{\Pr[C \cap (A \cap B)]}{\Pr[A \cap B]} \quad B \cap A = A \cap B$$

$$= \Pr[C \cap (A \cap B)] \quad \Pr[A \cap B] \text{ kürzen}$$

$$= \Pr[A \cap B \cap C] \quad \cap \text{ ist assoziativ und kommutativ}$$

Eine Familie hat zwei Kinder. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder Mädchen sind?

$\Omega = \{MM, MJ, JM, JJ\}$ ist ein Laplace-Raum

$$Pr[MM] = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Eine Familie zwei Kinder. Du weisst, dass mindestens eines der Kinder ein Mädchen ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder Mädchen sind?

Beide Kinder sind Mädchen: $A = \{MM\}$ $Pr[A] = \frac{1}{4}$

Eines der Kinder ist ein Mädchen: $B = \{MM, MJ, JM\}$ $Pr[B] = \frac{3}{4}$

$$Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]} = \frac{Pr[\{MM\}]}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Eine Familie hat zwei Kinder. Du weisst, dass das jüngere ein Mädchen ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder Mädchen sind?

Beide Kinder sind Mädchen: $A = \{MM\}$ $Pr[A] = \frac{1}{4}$

Das jüngere Kind ist ein Mädchen: $B = \{MM, MJ\}$ $Pr[B] = \frac{2}{4}$

$$Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]} = \frac{Pr[\{MM\}]}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Du hast drei Brotdosen. In jeder liegt ein Sandwich, das entweder mit **Käse (K)** oder **Schinken (S)** belegt ist:

- **Dose 1:** Ein Doppel-Käse-Sandwich (beide Seiten haben Käse: **K-K**).
- **Dose 2:** Ein gemischtes Sandwich (eine Seite Käse, eine Schinken: **K-S**).
- **Dose 3:** Ein Doppel-Schinken-Sandwich (beide Seiten Schinken: **S-S**).

Du greifst blind in eine zufällige Dose, holst das Sandwich heraus und beißt in eine Seite. Du merkst: „Ah, diese Seite schmeckt nach Käse!“

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die **andere Seite** dieses Sandwiches auch mit Käse belegt ist? (Sandwich i, Seite)

Wir betrachten die Hälften: $\Omega = \{(S1, a), (S1, b), (S2, a), (S2, b), (S3, a), (S3, b)\}$

Erste Seite Käse: $B = \{(S1, a), (S1, b), (S2, a)\}$ $Pr[B] = \frac{1}{2}$

Beide Seiten Käse: $A = \{(S1, a), (S1, b)\}$ $Pr[A] = \frac{1}{3}$

$$Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]} = \frac{Pr[\{(S1, a), (S1, b)\}]}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Exercise S5.1 – 3-colorable graphs Zusatz - Aufgabe

In the lecture you have seen an algorithm that finds an $O(\sqrt{|V|})$ -coloring for every 3-colorable graph (V, E) . Fix $\alpha = \sqrt{|V|}$. The algorithm goes as follows.

1. While there is a vertex v with degree at least α , color v with a new color, color the neighbors of v with two additional new colors, and delete v and all its neighbors from the graph.
2. Color all remaining vertices with at most $\alpha + 1$ colors.

We want to analyze and generalize this algorithm.

- (a) Where in the algorithm do we use that the graph is 3-colorable?
- (b) How many colors do we need at most (depending on α)? Show that for $\alpha = \sqrt{|V|}$ we only need $O(\sqrt{|V|})$ colors.
- (c) Show that your bound in (a) is tight. More precisely, create a 3-colorable graph on which the algorithm uses $\Omega(\sqrt{|V|})$ colors.
- (d) Can you describe an algorithm that finds a $O(|V|^{\frac{2}{3}})$ -coloring for every 4 colorable graph?
- (e) Can you describe an algorithm that finds a $O(|V|^{\frac{q-2}{q-1}})$ -coloring for every q colorable graph, where $q \geq 2$ is a constant?

Solution S5.1 – 3-colorable graphs

- (a) We use that the graph is 3-colorable to ensure that the neighbors of each vertex can be 2-colored.
- (b) Let k be the number of iterations that the while loop is executed. For each iteration, we need 3 colors. Thus, we need $3k$ colors for all iterations of the while loop. In each iteration of the while loop, we delete at least $\alpha + 1$ vertices. Hence, it is executed at most $\frac{n}{\alpha+1} \leq \frac{n}{\alpha}$ times. Hence, we need at most $3\frac{n}{\alpha}$ colors during the while loop. Afterwards, each remaining vertex has degree strictly less than α . Thus, the remaining vertices can be colored with at most $\alpha + 1$ colors, e.g. using the greedy algorithm (if α is an integer, α many colors suffice). In total this gives us an upper bound of $3\frac{n}{\alpha} + \alpha + 1$ on the colors we need. For $\alpha = \sqrt{|V|}$ this equals $4\sqrt{|V|} + 1$.
- (c) Fix some constant β . A wheel of size 2β is a cycle of length 2β and an additional “center vertex” that has one edge to each vertex on the cycle. Note that every wheel is 3-colorable. Let G be a graph consisting of β many disjoint wheels of size 2β . The graph G has $\beta(2\beta + 1)$ many vertices. Each center vertex has a degree of $2\beta > \sqrt{\beta(2\beta + 1)}$. Hence, when applied to G , the algorithm will execute β many iterations of the while loop (one for each “center vertex”). In each iteration, it introduces 3 new colors. Hence, it uses at $3\beta = \Omega(\sqrt{|V|})$ colors.
- (d) Set $\alpha = |V|^{2/3}$.
 - (a) While there is a vertex v with degree at least α , color v with a new color, color α many of the neighbors of v with $4\sqrt{\alpha} + 1$ additional new colors (using our algorithm for 3-colorable graphs), and delete v and all its neighbors from the graph.
 - (b) Color all remaining vertices with at most $\alpha + 1$ colors.

Similar to before, let k be the number of iterations of the while loop. The number of colors used can be bounded by

$$k \cdot (4\sqrt{\alpha} + 1) + \alpha + 1 \leq \frac{n}{\alpha} \cdot (4\sqrt{\alpha} + 1) + \alpha + 1.$$

For $\alpha = |V|^{2/3}$, this value is at most $O(|V|^{\frac{2}{3}})$.

- (e) One can proceed similarly to (d). To get a q -coloring, one calls the algorithm to obtain $q - 1$ -coloring. The value α can be chosen as $\alpha = O(|V|^{\frac{q-2}{q-1}})$.