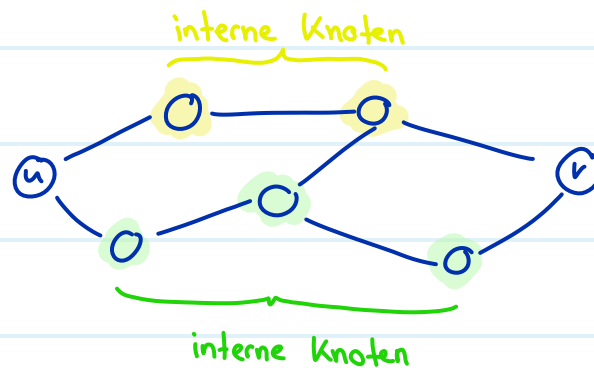


Zusammenhang

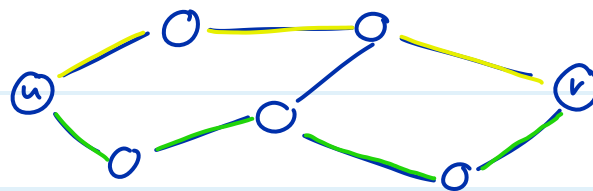
G ist k -Knoten-zusammenhängend $\Leftrightarrow$ egal welche $k-1$ Knoten man entfernt, der Graph bleibt zusammenhängend

Menger
 $\Leftrightarrow$ Für zwei verschiedene Knoten $u, v \in V$ gibt es mindestens k intern knotendisjunkte $u-v$ -Pfade



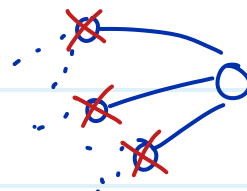
G ist k -Kanten-zusammenhängend $\Leftrightarrow$ egal welche $k-1$ Kanten man entfernt, der Graph bleibt zusammenhängend

Menger
 $\Leftrightarrow$ Für zwei verschiedene Knoten $u, v \in V$ gibt es mindestens k kantendisjunkte $u-v$ -Pfade



- Knotenzusammenhang $\leq$ Kantenzusammenhang $\leq$ minimaler Grad

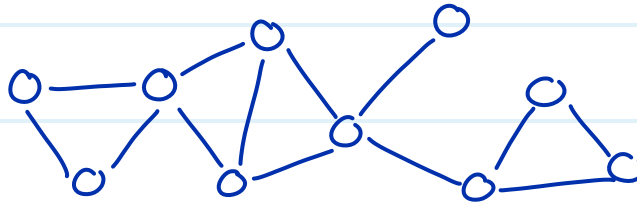
↪ wegen Menger



$e \in E$ ist eine Brücke $\Leftrightarrow G$ ist zusammenhängend aber $G - e$ ist nicht zusammenhängend

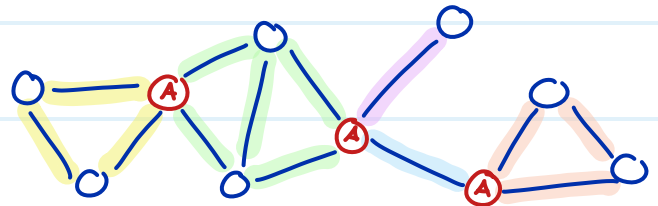
$v \in V$ ist ein Artikulationsknoten $\Leftrightarrow G$ ist zusammenhängend aber $G[V \setminus \{v\}]$ ist nicht zusammenhängend

Beispiel:



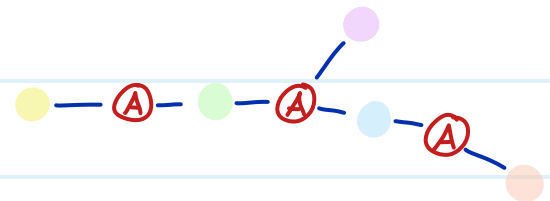
Äquivalenzrelation: (Beweis ausgelassen)

$e \sim f \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} e = f \text{ oder } e \text{ und } f \text{ liegen auf einem gemeinsamen Kreis}$



Blöcke = Äquivalenzklassen (= verschiedene Farben)

Blockgraph:



- ist immer ein Baum
- Beweis

Intuition: • Artikulationsknoten sind "wichtig", daher der Name

• Jeder beliebige Weg $\bullet$ zu $\bullet$ muss zwingend durch den ersten Artikulationsknoten gehen

• Wir können Probleme in Blöcke zerlegen und vereinfachen.

Wenn wir einen kürzesten Pfad von $\bullet$ nach $\bullet$ suchen, können wir alle anderen Blöcke ignorieren (bei positiven Kantengewichten)

• Kann Laufzeit stark verbessern (Beispiel alle Blöcke ≤ 100)

Tarjan Algorithmus: (ohne Namen in der Vorlesung)

• Findet Artikulationsknoten und Brücken

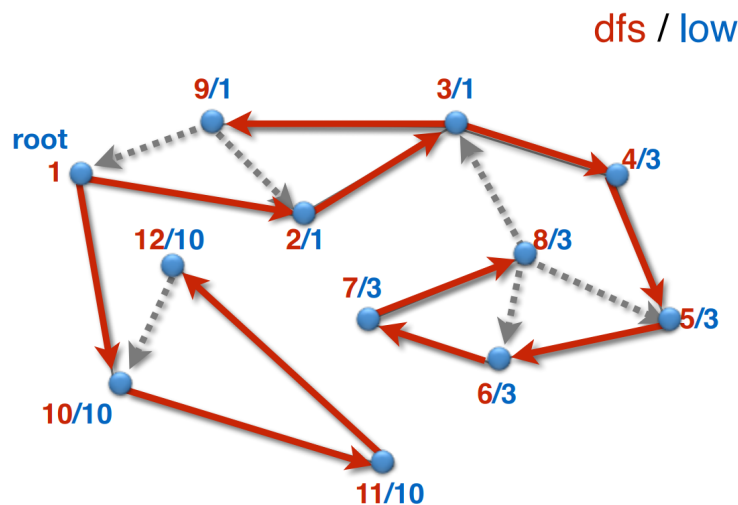
1) wir führen dfs aus von einem beliebigen Startknoten

$\text{dfs}[v] \stackrel{\text{def}}{=} \text{pre-Nummern}$

2) Baumkanten richten wir nach pre-Nummern aufsteigend (= vorwärts)

3) Restkanten richten wir nach pre-Nummern absteigend (= rückwärts)

4) $\text{low}[v] \stackrel{\text{def}}{=} \text{kleinste dfs Nummer, die wir von } v \text{ aus durch einen Pfad von beliebig vielen Baumkanten und max. einer Restkante erreichen können}$

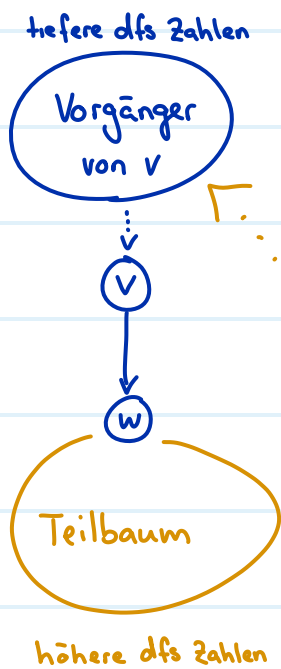


5) Startknoten s ist Artikulationsknoten $\Leftrightarrow s$ hat mindestens zwei Kinder
im dfs Baum

Erklärung: wenn wir s entfernen wären die beiden Kinder nicht mehr verbunden

$v \neq s$ ist ein Artikulationsknoten $\Leftrightarrow$ es gibt ein Kind w von v mit $\text{low}[w] \geq \text{dfs}[v]$

Erklärung:



es gibt ein Kind w von v mit $\text{low}[w] \geq \text{dfs}[v]$

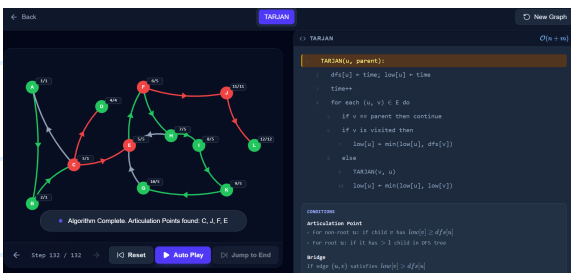
$\Leftrightarrow$ es gibt keine solche orange Restkante aus dem Teilbaum von w zu einem Vorgänger von v

$\Leftrightarrow$ Nach dem Entfernen von v ist ein Kind w von v mit keinem Vorgänger von v mehr verbunden

$\Leftrightarrow v \neq s$ ist ein Artikulationsknoten

6) $e = \{u, v\}$ ist eine Brücke $\Leftrightarrow (u, v) \in \text{dfs Baum}$ und $\text{low}[v] > \text{dfs}[u]$

Erklärung analog wie oben



Intuitives Verständnis viel wichtiger als genaue Implementierung

Kreise

Eulertour: ein geschlossener Weg, der alle Kanten genau einmal enthält

Hamiltonkreis: ein Kreis, der alle Knoten genau einmal enthält

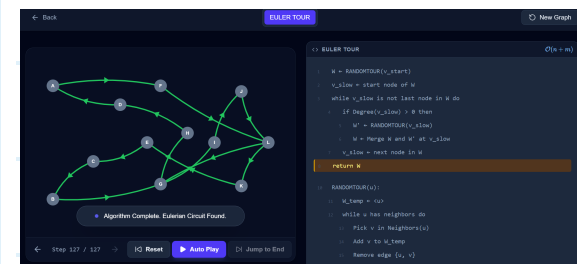
Richtig/falsch?

- Eine Eulertour ist ein Kreis
- Es gibt eine Eulertour $\Leftrightarrow \forall v \in V: \deg(v)$ ist gerade
- Es gibt eine Eulertour $\Leftrightarrow \forall v \in V: \deg(v)$ ist gerade und G ist zusammenhängend

Wichtig: Es gibt eine Eulertour $\Leftrightarrow \forall v \in V: \deg(v)$ ist gerade und alle Kanten sind in derselben Zusammenhangskomponente

In jeden Knoten geht man so oft "hinein" wie "hinaus"

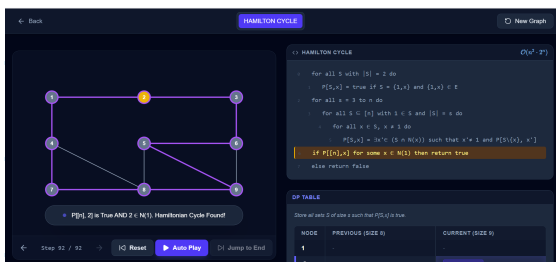
Algorithmus für Eulertour in $O(m)$:



greedy Algorithm: Wir finden einen Kreis und entfernen ihn und fügen ihn in die bisherige Lösung ein

Intuitives Verständnis viel wichtiger als genaue Implementierung

Hamiltonkreis: (heute nur kurz, der Algorithmus wird später in der Vorlesung noch einmal erklärt)



- Anzahl Hamiltonkreise im Skript unwichtig
- NP-vollständig $\approx$ vermutlich nicht in polynomieller Zeit lösbar
- Anzahl Hamiltonkreise in $K_n = \frac{n!}{2n} \leftarrow$ alle möglichen Knotenreihenfolgen
 $\leftarrow$ jeder Kreis kann n Startpunkte haben und in zwei Richtungen gehen
 $= \frac{1}{2}(n-1)!$

Satz von Dirac: $\forall v \in V: \deg(v) \geq \frac{|V|}{2}$ und $|V| \geq 3 \Rightarrow G$ hat einen Hamiltonkreis

Beweis: Teil 1: Zusammenhang

Seien $x, y \in V$ beliebig

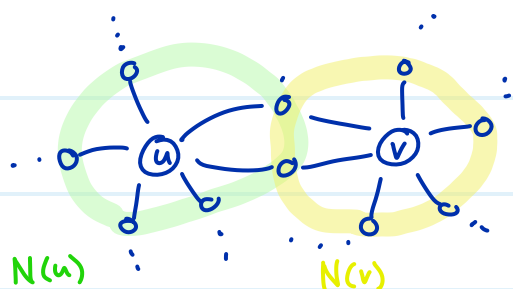
Case: $\{x, y\} \in E \Rightarrow$ es gibt einen u - v -Pfad

Case: $\{x, y\} \notin E$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow |N(u) \cap N(v)| &= |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cup N(v)| && \text{(Siebformel)} \\
 \text{Gemeinsame Nachbarn} &\geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - |N(u) \cup N(v)| && (\deg(u), \deg(v) \geq \frac{n}{2}) \\
 &\geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - (n-2) && (u, v \notin N(u) \cup N(v)) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Es gibt einen u - v -Pfad weil u und v einen gemeinsamen Nachbar haben

$\Rightarrow G$ ist zusammenhängend



$$n = 12$$

$$\deg(u), \deg(v) \geq 6$$

Teil 2: Hamiltonkreis

Sei $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ ein längster Pfad in G

$\Rightarrow N(v_1) \subseteq P$ und $N(v_k) \subseteq P$ (sonst könnten wir P mit einem noch nicht verwendeten Knoten verlängern $\rightarrow$ Contradiction)

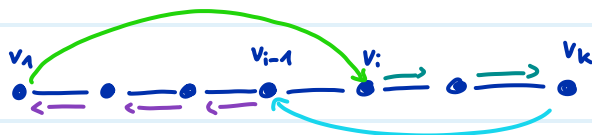
$\Rightarrow$ Es gibt zwei aufeinander folgende Knoten v_{i-1}, v_i

sodass $v_{i-1} \in N(v_k)$ und $v_i \in N(v_1)$

(Pigeonhole Prinzip:

$$\deg(v_1), \deg(v_k) \geq \frac{n}{2}$$

aber nur $n-1$ Möglichkeiten für v_i)



$\Rightarrow C = (v_1, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_2)$ ist ein Kreis mit k Knoten

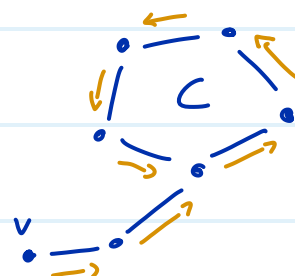
Case: Es gibt einen Knoten $v \in V$ der nicht in C ist

$\Rightarrow v$ ist verbunden mit dem Kreis C (Teil 1)

$\Rightarrow$ Wir schneiden C an der Verbindungsstelle auf und erstellen

so einen Pfad, der länger ist als P

$\Rightarrow$ Widerspruch, dieser Fall kann also nie eintreten



Case: Alle Knoten $v \in V$ sind in C enthalten

$\Rightarrow C$ ist per Definition ein Hamiltonkreis 

Dieser Beweis ist wichtig!

Organisatorisches

- Erste Theorie Aufgabe wird heute auf Moodle erscheinen
- 1 Woche Zeit
- max 2 Bonus Punkte
- Gruppen erlaubt (max zu dritt, alle beim gleichen TA eingeschrieben)
auf Abgabe Gruppenmitglieder nennen, jedes Gruppenmitglied lädt die gemeinsame Version hoch
- Bitte ETH username in den Dateinamen, zB: Ex1_jheger_msteiner
- Aufgaben sind schwieriger als in A&D

Fragen?